

## ベクトル解析演習 演習問題 (9) 面積分 (問題編)

担当: 金丸隆志

学籍番号:

氏名:

## [問題 1] スカラー関数の面積分 (1)

曲面  $S$  を  $x + y + z = 2$  ( $0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 2$ ) とする。以下の面積分を求めよ

$$\int_S (x + y) dS$$

(ヒント)

まず、曲面を  $\mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v)$  の形に定めなければならない。通常は、 $x = u, y = v$  とすればよい。すると、 $S$  上では  $z = 2 - x - y = 2 - u - v$  となるので、

$$\mathbf{r}(u, v) = \begin{pmatrix} u \\ v \\ 2 - u - v \end{pmatrix} \text{ となり、曲面の媒介変数表}$$

示が完成する。後は  $f = x + y = u + v$  と合わせて公式に代入すれば良い。 $u, v$  の積分区間は問題文の条件  $0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 2$  より定まる。

## [問題 2] スカラー関数の面積分 (2)

曲面  $S$  を  $x + y + z = 2$  ( $x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$ ) とする。以下の面積分を求めよ

$$\int_S (x + y) dS$$

(ヒント)

積分区間以外は [問題 1] と同じである。条件  $z \geq 0$  をどう使うかであるが、曲面の方程式  $x + y + z = 2$  より  $z = 2 - x - y \geq 0$ , すなわち、 $y \leq 2 - x$  がわかる。これと  $x \geq 0, y \geq 0$  を合わせれば、 $0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 2 - x$  がわかる ( $xy$  平面で図を描いてみること)。

(次のページに続く)

[問題 3] ベクトル場の面積分

曲面  $S$  を  $x + y + z = 2$  ( $0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 2$ ) と

する。この曲面におけるベクトル場  $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} x \\ -y \\ -z \end{pmatrix}$  の

面積分

$$\int_S \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S}$$

を求めよ。

(ヒント)

曲面の媒介変数表示と積分区間とは [問題 1] と同じである。後は  $\mathbf{A}$  を  $u, v$  で表示し、補足編に従い  $d\mathbf{S}$  を求めて代入し、 $u, v$  で積分。