ベクトル解析演習 演習問題 (9) 面積分 (補足編)

担当: 金丸隆志

学籍番号: ______________________ 氏名: ______________________

[解説 1] 曲線の媒介変数表示

一般に空間上の曲線は、一つの媒介変数 t を用いて $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t)$ と書ける。

例 1) x 軸 $\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

例 2) xy 平面上の放物線 ($y = x^2$, $z = 0$)

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ t^2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

例 3) xy 平面上の円 ($x^2 + y^2 = 1$, $z = 0$)

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \\ 0 \end{pmatrix}$$

[解説 2] 曲面の媒介変数表示

一般に空間上の曲面は、二つの媒介変数 u, v を用いて $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(u, v)$ と書ける。

例 1) xy 平面

$$\begin{pmatrix} x(u,v) \\ y(u,v) \\ z(u,v) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u \\ v \\ 0 \end{pmatrix}$$

例 2) 放物面 $z = x^2 + y^2$

$$\begin{pmatrix} x(u,v) \\ y(u,v) \\ z(u,v) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u \\ v \\ u^2 + v^2 \end{pmatrix}$$

例 3) 半径 1 の球面 $x^2 + y^2 + z^2 = 1$

$$\begin{pmatrix} x(u,v) \\ y(u,v) \\ z(u,v) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos u \sin v \\ \sin u \sin v \\ \cos v \end{pmatrix}$$

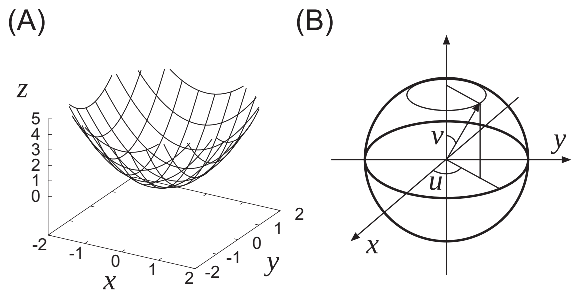

図 1: (A) **[解説 2]** 例 2) の放物面、(B) 例 3) の球面

[解説 3] 曲面の法線ベクトル

曲面 $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(u, v)$ に対して $\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u}$ および $\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v}$ は、それぞれ図 2 の u 曲線、 v 曲線に接するベクトルになる。$\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u}$ および $\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v}$ が作る平面を**接平面**という。さらに、それらの外積 $\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v}$ は接平面に垂直となり、法線ベクトルという。

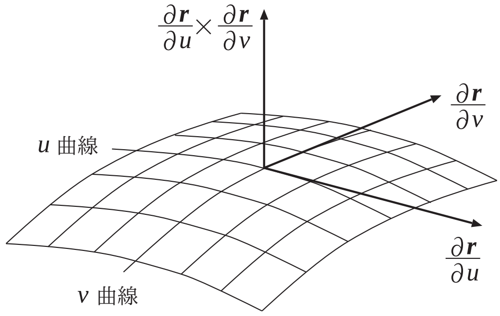

図 2: 法線ベクトル

[解説 4] 面要素 dS とベクトル面要素 $d\boldsymbol{S}$

曲面 $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(u, v)$ 上で媒介変数 u、v が微小量 du、dv だけ動いた際、できる矩形領域の面積を面要素 dS と呼ぶ。また、大きさ dS を持ち、この面に垂直なベクトルのことを面要素ベクトル $d\boldsymbol{S}$ といい、次式を満たす。

$$d\boldsymbol{S} = \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v} du dv \tag{1}$$

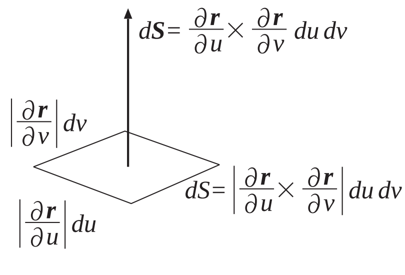

図 3: 面要素 dS とベクトル面要素 $d\boldsymbol{S}$

(次のページにつづく)

[解説 5] スカラーとベクトルの面積分

曲面 $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(u, v)$ 上で定義された関数 $f = f(u, v)$ に対する面積分は以下で定義される

$$\int_S f dS = \int \int f(u, v) \left| \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v} \right| dudv \tag{2}$$

$f(u, v) = 1$ とすれば、これは曲面 S の面積となる。

一方、同じ曲面上で定義されたベクトル場 $\boldsymbol{A}$ に対する面積分は以下で定義される。

$$\int_S \boldsymbol{A} \cdot d\boldsymbol{S} \tag{3}$$

ベクトル $\boldsymbol{A}$ とベクトル面要素 $d\boldsymbol{S}$ との内積の積分であることに注意。$d\boldsymbol{S}$ は (1) 式で定義される。