ベクトル解析演習 演習問題 (7) ∇、grad、div、rot、$\triangle$ (補足編)

担当: 金丸隆志

学籍番号: ＿＿＿＿＿＿＿＿ 氏名: ＿＿＿＿＿＿＿＿

[解説 0] ∇、grad、div、rot、$\triangle$ (再々掲)

スカラー場 $\phi(x,y,z)$ とベクトル場 $\boldsymbol{A}(x,y,z)$ に対して、形式的に定義された**ナブラ** $\nabla = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix}$ という演算子を用いて、以下の演算が定義される。

- **勾配、グラディエント (gradient)**
  $\mathrm{grad}\ \phi(x,y,z) \equiv \nabla\phi = \begin{pmatrix} \frac{\partial\phi}{\partial x} \\ \frac{\partial\phi}{\partial y} \\ \frac{\partial\phi}{\partial z} \end{pmatrix}$
  スカラー場 ϕ の勾配 grad ϕ はベクトル場になることに注意しよう。

- **発散、ダイバージェンス (divergence)**
  $\mathrm{div}\ \boldsymbol{A}(x,y,z) \equiv \nabla\cdot\boldsymbol{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$
  $\nabla\cdot\boldsymbol{A}$ の「$\cdot$」は「∇ と $\boldsymbol{A}$ の内積を計算」と考えると覚えやすい。

- **回転、ローテーション (rotation)**
  $\mathrm{rot}\ \boldsymbol{A}(x,y,z) \equiv \nabla\times\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \\ \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \\ \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \end{pmatrix}$
  $\nabla\times\boldsymbol{A}$ の「$\times$」は「∇ と $\boldsymbol{A}$ の外積を計算」と考えると覚えやすい。

- **ラプラシアン**
  $\triangle \equiv \nabla^2 \equiv \nabla\cdot\nabla = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ をラプラシアンと呼び、スカラー場 $\phi(x,y,z)$ に対して $\triangle\phi = \frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial z^2}$ と適用される。
  $\nabla\cdot\nabla$ の「$\cdot$」は「∇ と ∇ の内積を計算」と考えると覚えやすい。

[解説 1]

物理 III で学ぶ電磁気学において ∇ がどのように使われているか簡単に紹介しておこう。

今、位置 (x,y,z) における電場 $\boldsymbol{E}$ は、スカラー場である静電ポテンシャル $\phi(x,y,z)$ を用いて

$$\boldsymbol{E} = -\mathrm{grad}\ \phi = -\nabla\phi \tag{1}$$

と書けることが知られている。今回 [**問題 2**] (b) で学ぶように $\mathrm{rot}(\mathrm{grad}\ \phi) = \nabla\times(\nabla\phi) = 0$ が一般に成り立つから、

$$\mathrm{rot}\ \boldsymbol{E} = -\mathrm{rot}\ (\mathrm{grad}\ \phi) = -\nabla\times(\nabla\phi) = 0 \tag{2}$$

すなわち、電場 $\boldsymbol{E}$ には回転は存在しないことがわかる。

一方、磁場 $\boldsymbol{B}$ はベクトルポテンシャルと呼ばれるベクトル場 $\boldsymbol{A}$ を用いて

$$\boldsymbol{B} = \mathrm{rot}\ \boldsymbol{A} = \nabla\times\boldsymbol{A} \tag{3}$$

と書けることが知られている。今回 [**問題 2**] (a) で学ぶように $\mathrm{div}\ (\mathrm{rot}\ \boldsymbol{A}) = \nabla\cdot(\nabla\times\boldsymbol{A}) = 0$ となることが知られているので、

$$\mathrm{div}\ \boldsymbol{B} = \mathrm{div}\ (\mathrm{rot}\ \boldsymbol{A}) = \nabla\cdot(\nabla\times\boldsymbol{A}) = 0 \tag{4}$$

となる。つまり、磁場 $\boldsymbol{B}$ には湧き出しや吸い込みは存在しない。これは、電場 $\boldsymbol{E}$ に対応する電荷は存在するが、磁場 $\boldsymbol{B}$ に対応する**磁荷は存在しない**ことを表している。

電場 $\boldsymbol{E}$ と磁場 $\boldsymbol{B}$ において、(1) 式と (3) 式、そして (2) 式と (4) 式がそれぞれ対応している。

[解説 2]

調和関数についても補足しておこう。今、電荷密度を ρ、真空の誘電率を ϵ_0 とすると、

$$\nabla\cdot\boldsymbol{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \tag{5}$$

が成り立つ。これを**ガウスの法則** (の微分形式) という。ここに (1) 式を代入すると

$$\nabla\cdot(\nabla\phi) = -\frac{\rho}{\epsilon_0} \tag{6}$$

となり、これは**ポアソン方程式**

$$\triangle\phi = -\frac{\rho}{\epsilon_0} \tag{7}$$

に書き直される。特に、電荷が存在せず $\rho = 0$ のときは**ラプラス方程式**

$$\triangle\phi = 0 \tag{8}$$

となり、この解が**調和関数**と呼ばれるわけである。