ベクトル解析演習 演習問題 (6) スカラー場とベクトル場、∇、grad、div、rot、△ (補足編)

担当: 金丸隆志

学籍番号: ＿＿＿＿＿＿＿＿ 氏名: ＿＿＿＿＿＿＿＿

[解説 1] スカラー場とベクトル場 (再掲)

スカラー場 $\phi(x,y,z)$ と**ベクトル場** $\boldsymbol{A}(x,y,z) = \begin{pmatrix} A_x(x,y,z) \\ A_y(x,y,z) \\ A_z(x,y,z) \end{pmatrix}$ について解説する。**スカラー場**は「位置 (x,y,z) を定めると値 (スカラー) ϕ が定まる」関数で、例としては「**天気図における気圧の分布**」や、「**地図における標高の分布**」などを思い描くと良い。一方、**ベクトル場**は「位置 (x,y,z) を定めるとベクトル $\boldsymbol{A}$ が定まる」関数であり、例としては「**天気図における風向きと風速の分布**」などを思い描くと良い。

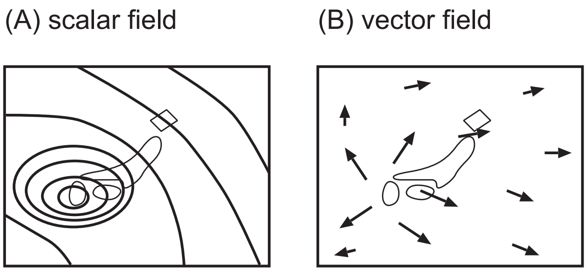

図 1: (A) スカラー場と (B) ベクトル場のイメージ

主に用いられる分野は、物理の力学、電磁気学、流体力学などである。

[解説 2] ∇、grad、div、rot、△ (前回のものに追加)

スカラー場 $\phi(x,y,z)$ とベクトル場 $\boldsymbol{A}(x,y,z)$ に対して、形式的に定義された**ナブラ** $\nabla = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix}$ という演算子を用いて、以下の演算が定義される。

- **勾配、グラディエント (gradient)**
  $\mathrm{grad}\ \phi(x,y,z) \equiv \nabla\phi = \begin{pmatrix} \frac{\partial \phi}{\partial x} \\ \frac{\partial \phi}{\partial y} \\ \frac{\partial \phi}{\partial z} \end{pmatrix}$
  スカラー場 ϕ の勾配 grad ϕ はベクトル場になることに注意しよう。

- **発散、ダイバージェンス (divergence)**
  $\mathrm{div}\ \boldsymbol{A}(x,y,z) \equiv \nabla\cdot\boldsymbol{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$
  $\nabla\cdot\boldsymbol{A}$ の「$\cdot$」は「∇ と $\boldsymbol{A}$ の内積を計算」と考えると覚えやすい。

- **回転、ローテーション (rotation)**
  $\mathrm{rot}\ \boldsymbol{A}(x,y,z) \equiv \nabla\times\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \\ \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \\ \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \end{pmatrix}$
  $\nabla\times\boldsymbol{A}$ の「$\times$」は「∇ と $\boldsymbol{A}$ の外積を計算」と考えると覚えやすい。

- **ラプラシアン**
  $\triangle \equiv \nabla^2 \equiv \nabla\cdot\nabla = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ をラプラシアンと呼び、スカラー場 $\phi(x,y,z)$ に対して $\triangle\phi = \frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial z^2}$ と適用される。
  $\nabla\cdot\nabla$ の「$\cdot$」は「∇ と ∇ の内積を計算」と考えると覚えやすい。

[解説 3] ポテンシャルと勾配 (グラディエント)

1 次元における力学を考えよう。ポテンシャル $U(x)$ のもとで物体に働く力は $F = -\frac{dU}{dx}$ と書けるのだった。例えばばねのポテンシャル $U(x) = \frac{1}{2}kx^2$ に対する力は $F = -\frac{dU}{dx} = -kx$ であった。

また、質量 M の物体から距離 r におかれた質量 m の物体に対する万有引力のポテンシャルは、万有引力定数を G として

$$U(r) = -\frac{GMm}{r} \tag{1}$$

であったが、この物体に働く力は

$$F = -\frac{dU}{dr} = -\frac{GMm}{r^2} \tag{2}$$

と計算できるのだった。

以上は 1 次元に限定された話であったが、これを多次元に拡張すると、勾配 (グラディエント) が登場する。いま、位置 (x,y,z) におけるポテンシャルをスカラー場 $\phi(x,y,z)$ で表すと、この位置の物体に働く力 $\boldsymbol{F}$ は

$$\boldsymbol{F} = -\mathrm{grad}\ \phi(x,y,z) = -\nabla\phi \tag{3}$$

となる。$\boldsymbol{F}$ は**ベクトル場**となることに注意しよう。

[解説 4] 発散 (ダイバージェンス) の例と意味

(例題) ベクトル場 $\boldsymbol{A}(x,y,z) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ に対して、発散 div $\boldsymbol{A}$ を計算せよ。

$\rightarrow$

(解法と意味)

$$\begin{aligned} \text{div } \boldsymbol{A} &= \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \\ &= \frac{\partial}{\partial x}x + \frac{\partial}{\partial y}y + \frac{\partial}{\partial z}z \\ &= 1+1+1 \underline{= 3} \end{aligned}$$

解法としては以上であるが、ここで div $\boldsymbol{A}$ の意味も学んでしまおう。一般的に、div $\boldsymbol{A}$ の計算結果は x、y、z の関数になるが、この例ではたまたま x、y、z に依存しない (位置 (x,y,z) に依存しない) 定数になった。この意味を以下で解説する。

div $\boldsymbol{A}$ は流体力学の**湧き出し**や**吸い込み**に関係して覚えると理解が用意である。簡単のため 2 次元で図示しよう。まず、ベクトル場 $\boldsymbol{A}(x,y)$ は図 2 のようになる。放射状のベクトル場になることは、例えば「点

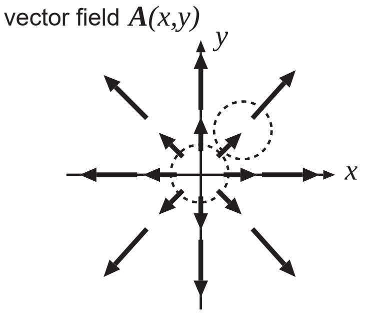

図 2: ベクトル場 $\boldsymbol{A}(x,y,z)$ のイメージ図

$(1,0)$ におけるベクトルは $(1,0)$」、「点 $(-1,-1)$ におけるベクトルは $(-1,-1)$」のように一つ一つ図示して行けばわかる。また、ベクトルの成分が $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ であるから、原点から離れるほど絶対値の大きなベクトルになることもわかるであろう。この例題での div $\boldsymbol{A} = 3 > 0$ は「任意の点 (x,y,z) においてベクトルが湧き出す」と理解できる。例えば、図 2 の原点付近の丸い点線を見ると、確かにベクトルが原点から湧き出していることがわかる。また、原点より右上の丸い点線を見ると、丸に吸い込まれるベクトルは短く、湧き出すベクトルは長いため、総和としてはやはりベクトルは湧き出している。まとめると、「任意の点で div $\boldsymbol{A} = 3 > 0$」とは、「任意の点でベクトルが湧き出す」ことを意味する。一方、もし div $\boldsymbol{A} < 0$ であれば、その点でベクトルは吸い込まれることを意味する。以上が、ベクトル場 $\boldsymbol{A}$ に対する発散 div $\boldsymbol{A} = \nabla \cdot \boldsymbol{A}$ の意味である。

[解説 5] 回転 (ローテーション) の例と意味

(例題) ベクトル場 $\boldsymbol{A}(x,y,z) = \begin{pmatrix} -y \\ x \\ 0 \end{pmatrix}$ に対して、回転 rot $\boldsymbol{A}$ を計算せよ。

$\rightarrow$

(解法と意味)

$$\text{rot } \boldsymbol{A} = \nabla \times \boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial y}0 - \frac{\partial}{\partial z}x \\ \frac{\partial}{\partial z}(-y) - \frac{\partial}{\partial x}0 \\ \frac{\partial}{\partial x}x - \frac{\partial}{\partial y}(-y) \end{pmatrix} = \underline{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}}$$

一般に rot $\boldsymbol{A}$ は位置 (x,y,z) に依存するベクトル場になるが、この例題では (たまたま) 位置に依存しないベクトルが得られた。

rot $\boldsymbol{A}$ は位置 (x,y,z) に渦 (ベクトルの回転) が存在するかどうかを示していると考えると良い。この例

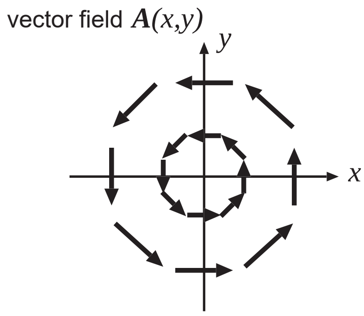

図 3: ベクトル場 $\boldsymbol{A}(x,y,z)$ のイメージ図

題のベクトル場のイメージ図は図 3 のようになる。この図は各点におけるベクトルを一つ一つ書き込んでゆくことで得られる。ベクトルの回転 (すなわち渦) があれば、その回転の向きに右ねじをまわしたときにねじが進む方向が rot $\boldsymbol{A}$ であると考えれば良い。ベクトル場に渦がなければ rot $\boldsymbol{A}$ はゼロベクトルになる。