ベクトル解析演習 演習問題 (5) スカラー場とベクトル場、∇、grad (補足編)

担当: 金丸隆志

学籍番号: ＿＿＿＿＿＿＿＿ 氏名: ＿＿＿＿＿＿＿＿

[補足 1] スカラー場とベクトル場

スカラー場 $\phi(x,y,z)$ と**ベクトル場** $\boldsymbol{A}(x,y,z) = \begin{pmatrix} A_x(x,y,z) \\ A_y(x,y,z) \\ A_z(x,y,z) \end{pmatrix}$ について解説する。**スカラー場**は「位置 (x,y,z) を定めると値 (スカラー) ϕ が定まる」関数で、例としては「**天気図における気圧の分布**」や、「**地図における標高の分布**」などを思い描くと良い。一方、**ベクトル場**は「位置 (x,y,z) を定めるとベクトル $\boldsymbol{A}$ が定まる」関数であり、例としては「**天気図における風向きと風速の分布**」などを思い描くと良い。

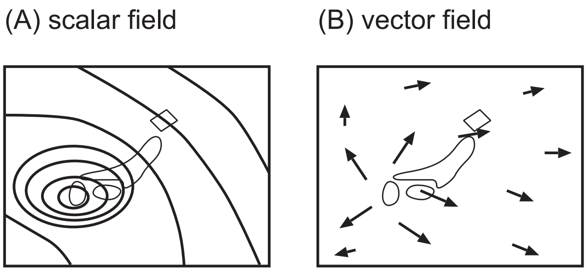

図 1: (A) スカラー場と (B) ベクトル場のイメージ

主に用いられる分野は、物理の力学、電磁気学、流体力学などである。

[補足 2] ∇、grad

スカラー場 $\phi(x,y,z)$ に対して、形式的に定義された**ナブラ** $\nabla = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix}$ という演算子を用いて、以下の演算が定義される。

- **勾配、グラディエント (gradient)**

  $$\mathrm{grad}\ \phi(x,y,z) \equiv \nabla\phi = \begin{pmatrix} \frac{\partial\phi}{\partial x} \\ \frac{\partial\phi}{\partial y} \\ \frac{\partial\phi}{\partial z} \end{pmatrix}$$

  スカラー場 ϕ の勾配 grad ϕ はベクトル場になることに注意しよう。

[補足 3] ポテンシャルと勾配 (グラディエント)

1 次元における力学を考えよう。ポテンシャル $U(x)$ のもとで物体に働く力は $F = -\frac{dU}{dx}$ と書けるのだった。例えばばねのポテンシャル $U(x) = \frac{1}{2}kx^2$ に対する力は $F = -\frac{dU}{dx} = -kx$ であった。

また、質量 M の物体から距離 r におかれた質量 m の物体に対する万有引力のポテンシャルは、万有引力定数を G として

$$U(r) = -\frac{GMm}{r} \tag{1}$$

であったが、この物体に働く力は

$$F = -\frac{dU}{dr} = -\frac{GMm}{r^2} \tag{2}$$

と計算できるのだった。

以上は 1 次元に限定された話であったが、これを多次元に拡張すると、勾配 (グラディエント) が登場する。いま、位置 (x,y,z) におけるポテンシャルをスカラー場 $\phi(x,y,z)$ で表すと、この位置の物体に働く力 $\boldsymbol{F}$ は

$$\boldsymbol{F} = -\mathrm{grad}\ \phi(x,y,z) = -\nabla\phi \tag{3}$$

となる。$\boldsymbol{F}$ は**ベクトル場**となることに注意しよう。