ベクトル解析演習 演習問題 (4) ベクトル関数の積分と空間曲線の長さ (解答編)

担当: 金丸隆志

学籍番号: ______________ 氏名: ______________

[問題 1] ベクトル関数の積分

重力加速度ベクトル $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -g \end{pmatrix}$ の元で、質量 m のボールをある方向に投げ上げたときの運動方程式は、ボールの位置ベクトルを $\boldsymbol{r}(t)$ として

$$m\frac{d^2\boldsymbol{r}(t)}{dt^2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -mg \end{pmatrix}$$

である。物体の初期位置ベクトルを $\boldsymbol{r}(0) = \boldsymbol{r}_0 = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$、初速度ベクトルを $\boldsymbol{v}_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$ としたとき、時刻 t におけるボールの位置ベクトル $\boldsymbol{r}(t)$ の成分を求めよ (ボールが地面にぶつかる時刻までの式のみで良い)。

[問題 1 解答]

加速度ベクトルは $\boldsymbol{a}(t) = \dfrac{d^2\boldsymbol{r}(t)}{dt^2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -g \end{pmatrix}$ であるから、

$$\begin{aligned} \boldsymbol{v}(t) &= \int \boldsymbol{a}(t)\,dt \\ &= \begin{pmatrix} \int 0\,dt \\ \int 0\,dt \\ \int (-g)\,dt \end{pmatrix} \qquad (1) \\ &= \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ -gt + C_3 \end{pmatrix} \qquad (2) \end{aligned}$$

となる。C_1、C_2、C_3 は積分定数である。(1) 式から (2) 式の変形において、**0 の不定積分は 0 ではなく積分定数が現われる**ことに注意しよう。ここで、$t = 0$ における初速度ベクトル $\boldsymbol{v}(0) = \boldsymbol{v}_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$ を代入すると、

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ -g\cdot 0 + C_3 \end{pmatrix}$$

より $C_1 = 1$、$C_2 = -2$、$C_3 = 2$ が得られるので、$\boldsymbol{v}(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -gt + 2 \end{pmatrix}$ となる。これを積分して

$$\begin{aligned} \boldsymbol{r}(t) &= \int \boldsymbol{v}(t)\,dt = \begin{pmatrix} \int 1\,dt \\ \int (-2)\,dt \\ \int (-gt + 2)\,dt \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} t + C_1' \\ -2t + C_2' \\ -\frac{g}{2}t^2 + 2t + C_3' \end{pmatrix} \end{aligned}$$

ここで、$t = 0$ のときの初期位置が $\boldsymbol{r}(t) = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$ であることに注意すると、$C_1' = 3$、$C_2' = -2$、$C_3' = 0$ と定まる。以上から、$\underline{\boldsymbol{r}(t) = \begin{pmatrix} t + 3 \\ -2t - 2 \\ -\frac{g}{2}t^2 + 2t \end{pmatrix}}$。

なお、一般に初期位置を $\boldsymbol{r}(0) = \boldsymbol{r}_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}$、初速度ベクトルを $\boldsymbol{v}_0 = \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \\ w_0 \end{pmatrix}$ としたときは、

$$\boldsymbol{r}(t) = \tfrac{\boldsymbol{g}}{2}t^2 + \boldsymbol{v}_0 t + \boldsymbol{r}_0 = \begin{pmatrix} u_0 t + x_0 \\ v_0 t + y_0 \\ -\frac{g}{2}t^2 + w_0 t + z_0 \end{pmatrix}$$

となることに注意。

[問題 2] らせんの長さ

位置ベクトル $\boldsymbol{r}(t) = \begin{pmatrix} a\cos t \\ a\sin t \\ bt \end{pmatrix}$ が時刻 $t = 0$ から時刻 $t = T$ までに描く曲線の長さ s を求めよ ($a > 0$)。

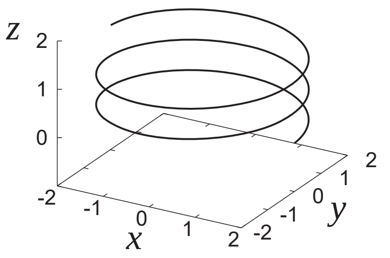

図 1: $a = 2$、$b = 0.1$ の場合のらせんの図。問題を解く場合は a、b の文字を用いたまま解くこと。

[問題 2 解答]

定義通り計算すれば良い。$\boldsymbol{r'}(t) = \begin{pmatrix} -a\sin t \\ a\cos t \\ b \end{pmatrix}$ より、

$$
\begin{aligned}
s &= \int_0^T \sqrt{(-a\sin t)^2 + (a\cos t)^2 + b^2}\,dt \\
&= \int_0^T \sqrt{a^2(\sin^2 t + \cos^2 t) + b^2}\,dt \\
&= \int_0^T \sqrt{a^2 + b^2}\,dt \\
&= [\sqrt{a^2+b^2}t]_0^T \\
&= \underline{\sqrt{a^2+b^2}\,T}
\end{aligned}
$$

なお、$b = 0$ を代入すれば $s = aT$ となり、これは半径 a とラジアンで測った角度 T の積なので、円弧の長さを与える式である。