ベクトル解析演習 演習問題 (4) ベクトル関数の積分と空間曲線の長さ (補足編)

担当: 金丸隆志

学籍番号:＿＿＿＿＿＿＿ 氏名:＿＿＿＿＿＿＿

[補足 1] ベクトル関数の積分

時間 t における粒子の位置ベクトルが $\boldsymbol{r}(t)$ であるとき、その速度ベクトル $\boldsymbol{v}(t)$、加速度ベクトルは $\boldsymbol{a}(t)$ はそれぞれ

$$\boldsymbol{v}(t) = \frac{d\boldsymbol{r}(t)}{dt}, \quad \boldsymbol{a}(t) = \frac{d\boldsymbol{v}(t)}{dt} = \frac{d^2\boldsymbol{r}(t)}{dt^2}$$

で表すことができる。これらの関係を積分で表せば

$$\boldsymbol{r}(t) = \int \boldsymbol{v}(t)\,dt, \quad \boldsymbol{v}(t) = \int \boldsymbol{a}(t)\,dt$$

となる。積分は定積分 ($\int_\alpha^\beta$) ではなく不定積分 ($\int$) であることに注意。

なお、ベクトルの積分はベクトルの微分同様「成分ごとに積分」すれば良いだけである。すなわち、例えば $\boldsymbol{v}(t) = \begin{pmatrix} v_x(t) \\ v_y(t) \\ v_z(t) \end{pmatrix}$ であるとすれば、

$$\boldsymbol{r}(t) = \int \boldsymbol{v}(t)\,dt = \begin{pmatrix} \int v_x(t)\,dt \\ \int v_y(t)\,dt \\ \int v_z(t)\,dt \end{pmatrix}$$

である。

[補足 2] 1 次元 (スカラー) の場合の例題と解法

重力加速度 g の元で、質量 m のボールを鉛直上方向に初速度 v_0 で投げ上げたときの運動方程式は、ボールの高さを $x(t)$ として

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -mg$$

である。時刻 t におけるボールの高さ $x(t)$ を求めよ (ボールが地面にぶつかる時刻までの式のみで良い)。

→ (解法)

物体の加速度 $a(t)$ は

$$a(t) = \frac{d^2x}{dt^2} = -g$$

であることに注意すると、

$$v(t) = \int a(t)\,dt = \int (-g)\,dt = -gt + C$$

ただし C は積分定数。ここで、$t=0$ の時に $v(0) = v_0$ であることを用いると、

$$v_0 = -g\cdot 0 + C = C$$

よって積分定数は $C = v_0$ と定まる。よって

$$v(t) = -gt + v_0$$

この $v(t)$ を積分するとボールの位置 $x(t)$ が得られる。

$$\begin{aligned} x(t) &= \int v(t)\,dt = \int (-gt+v_0)\,dt && (1)\\ &= -\frac{g}{2}t^2 + v_0 t + C' && (2)\end{aligned}$$

ただし C' は積分定数である。ここで、$t=0$ のときに $x(0)=0$ (高さが 0) であることを代入すると、

$$0 = -\frac{g}{2}\cdot 0^2 + v_0\cdot 0 + C' \qquad (3)$$

より積分定数は $C'=0$ と定まる。以上から、答えは $\underline{x(t) = -\frac{g}{2}t^2 + v_0 t}$。

この問題のベクトル版を今回を解いてもらうわけである。なお、1 次元の鉛直投げ上げの公式を知っている人は多いと思うが、**それをそのままベクトル版に適用しても、公式に適用方法を間違えて不正解になる場合がほとんどであるし、答えがあっていても×にする。** 今回求めているのは、**運動方程式を (2 回) 積分して物体の位置 (位置ベクトル) を得る、というプロセス**であり、この方法自体は一次元でもベクトル版でも共通である。

[補足 3] ベクトル関数が描く空間上の曲線の長さ

時刻 t に応じてベクトル $\boldsymbol{r}(t)$ が変化すると、$\boldsymbol{r}(t)$ は空間上を軌跡を描く。$t_1 \le t \le t_2$ において $\boldsymbol{r}(t)$ が描く曲線の長さ s は

$$s = \int_{t_1}^{t_2} \left|\frac{d\boldsymbol{r}(t)}{dt}\right| dt$$

で表される。