ベクトル解析演習 演習問題 (3) ベクトル関数 (解答編)

担当: 金丸隆志

学籍番号: ＿＿＿＿＿＿＿＿ 氏名: ＿＿＿＿＿＿＿＿

[問題 1] 等速直線運動

時刻 t を変数としたベクトル関数 $\boldsymbol{r}(t)$ が $\boldsymbol{r}(t) = \begin{pmatrix} 1+3t \\ 2+5t \\ 4+2t \end{pmatrix}$ で与えられるとき、$\boldsymbol{r}(t)$ の微分 $\boldsymbol{r}'(t)$ を求めよ。

[問題 1 解答]

各成分ごとに t で微分すればよい。$\boldsymbol{r}'(t) = \underline{\begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}}$

なお、これは物理の言葉で言えば、初期位置 $\boldsymbol{r}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$、速度 $\boldsymbol{r}'(t) = \boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}$ の等速直線運動を表す。一般に、等速直線運動はベクトルを用いて $\boldsymbol{r}(t) = \boldsymbol{r}(0) + \boldsymbol{v}t$ で表される。

[問題 2] 一様重力下での投げ上げ (等加速度運動)

時刻 t を変数としたベクトル関数 $\boldsymbol{r}(t)$ が $\boldsymbol{r}(t) = \begin{pmatrix} 1+t \\ t \\ 2t - \frac{1}{2}gt^2 \end{pmatrix}$ で与えられるとき、以下の問に答えよ。ただし、g は定数のスカラー量である。

(a) $\boldsymbol{r}(t)$ の微分 $\boldsymbol{r}'(t)$ を求めよ。

(b) $\boldsymbol{r}(t)$ の二階微分 $\boldsymbol{r}''(t)$ を求めよ。

(c) いま、(a)、(b) で求めた二つのベクトルを $\boldsymbol{r}'(t) = \boldsymbol{v}(t)$、$\boldsymbol{r}''(t) = \boldsymbol{g}$ と書くことにする (正しく計算できていれば $\boldsymbol{g}$ には時間依存性はないはずである)。ここで $E = \frac{1}{2}|\boldsymbol{v}(t)|^2 - \boldsymbol{g}\cdot\boldsymbol{r}(t)$ を計算せよ (**絶対値計算と内積計算を定義通り行うこと!**)。また、この計算の結果 E は時刻 t の変化とともにどう変化するか論ぜよ。

[問題 2 解答]

定義通り計算すれば良い。

(a) $\boldsymbol{r}'(t) = \underline{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2-gt \end{pmatrix}}$ (b) $\boldsymbol{r}''(t) = \underline{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -g \end{pmatrix}}$

(c) (a)、(b) より $\boldsymbol{v}(t) = \boldsymbol{r}'(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2-gt \end{pmatrix}$ および $\boldsymbol{g} = \boldsymbol{r}''(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -g \end{pmatrix}$ であるから、

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}|\boldsymbol{v}(t)|^2 &= \frac{1}{2}(1^2 + 1^2 + (2-gt)^2) \\ &= \frac{1}{2}(1+1+4-4gt+g^2t^2) \\ &= 3 - 2gt + \frac{1}{2}g^2t^2 \qquad (1) \\ \boldsymbol{g}\cdot\boldsymbol{r}(t) &= 0\cdot(1+t) + 0\cdot t - g(2t - \frac{1}{2}gt^2) \\ &= -2gt + \frac{1}{2}g^2t^2 \qquad (2) \end{aligned}$$

が計算される。よって、

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{2}|\boldsymbol{v}(t)|^2 - \boldsymbol{g}\cdot\boldsymbol{r}(t) \\ &= \left(3 - 2gt + \frac{1}{2}g^2t^2\right) - \left(-2gt + \frac{1}{2}g^2t^2\right) \\ &= \underline{3} \end{aligned}$$

この計算結果からわかるように $\underline{E \text{ は時刻 } t \text{ によらず一定}}$ である。

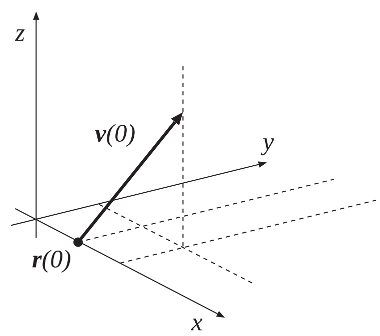

図 1: 物体の投げ上げ

想像がつくだろうが、質量 $m = 1$ の物体を一様重力下で投げ上げた時の**エネルギー保存則**を表している。整理すると、初期位置 $\boldsymbol{r}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ にて初速度 $\boldsymbol{v}(0) = \boldsymbol{r}'(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ で物体を投げ上げた状況である (図 1)。$E = 3$ は時刻 $t = 0$ における運動エネル

ギー $\frac{1}{2}|\boldsymbol{v}(0)|^2$ を表している。

(補足解説)

今、一様重力下における質量 m の物体の運動方程式

$$m\boldsymbol{r}''(t) = m\boldsymbol{g} \tag{3}$$

のもとで、運動エネルギーと位置エネルギーの和

$$E = \frac{1}{2}m|\boldsymbol{v}(t)|^2 - m\boldsymbol{g}\cdot\boldsymbol{r} \tag{4}$$

が一定であることを示しておこう。これはもちろん皆さんが既に知っている一次元での式 $E = \frac{1}{2}mv^2 + mgh$ のベクトル版である。位置エネルギーが $-m\boldsymbol{g}\cdot\boldsymbol{r}$ と mgh のように符号が異なるのは、重力加速度ベクトル $\boldsymbol{g} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -g \end{pmatrix}$ の中に負号が含まれているからである。

エネルギー E を時間で微分すると、

$$\begin{aligned}
\frac{dE}{dt} &= \frac{1}{2}m\frac{d|\boldsymbol{v}(t)|^2}{dt} - m\boldsymbol{g}\cdot\frac{d\boldsymbol{r}}{dt} && (5)\\
&= \frac{1}{2}m\frac{d(\boldsymbol{v}(t)\cdot\boldsymbol{v}(t))}{dt} - m\boldsymbol{g}\cdot\boldsymbol{v}(t) && (6)\\
&= m\boldsymbol{v}(t)\cdot\frac{d\boldsymbol{v}(t)}{dt} - m\boldsymbol{g}\cdot\boldsymbol{v}(t) && (7)\\
&= \left(m\frac{d\boldsymbol{v}(t)}{dt} - m\boldsymbol{g}\right)\cdot\boldsymbol{v}(t) \\
&= (m\boldsymbol{r}'' - m\boldsymbol{g})\cdot\boldsymbol{v}(t) && (8)
\end{aligned}$$

(8) 式に運動方程式 (4) 式を代入すれば、$dE/dt = 0$ が得られ、エネルギーは時間によらず一定であることが示せた。

なお、(5) 式から (6) 式では $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a} = |\boldsymbol{a}|^2$ を用いて絶対値を内積計算に変換しており、(6) 式から (7) 式では $\frac{d(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a})}{dt} = 2\boldsymbol{a}\cdot\frac{d\boldsymbol{a}}{dt}$ により内積の微分を行っていることに注意。

[問題 3] 回転運動

時刻 t を変数としたベクトル関数 $\boldsymbol{r}(t)$ が

$\boldsymbol{r}(t) = \begin{pmatrix} 2\cos t \\ 2\sin t \\ 0 \end{pmatrix}$ であるとき、以下の問に答えよ。

(a) $\boldsymbol{r}'(t)$ を計算せよ。

(b) $\boldsymbol{r}(t)$ と $\boldsymbol{r}'(t)$ の内積 $\boldsymbol{r}(t)\cdot\boldsymbol{r}'(t)$ を計算せよ。また、この結果は何を意味するか考察せよ。

[問題 3 解答]

定義通り計算すれば良い。

(a) $\underline{\boldsymbol{r}'(t) = \begin{pmatrix} -2\sin t \\ 2\cos t \\ 0 \end{pmatrix}}$ なお、図 2 のようにこの運動は xy 平面上での半径 2 の回転運動を表している。

(b)

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{r}(t)\cdot\boldsymbol{r}'(t) &= (2\cos t)\cdot(-2\sin t) + (2\sin t)\cdot(2\cos t) + 0\cdot 0\\
&= -4\cos t\sin t + 4\sin t\cos t\\
&= \underline{0}
\end{aligned}$$

これは、<u>位置ベクトル $\boldsymbol{r}(t)$ と速度ベクトル $\boldsymbol{r}'(t)$ が直交することを表している</u> (図 2)。

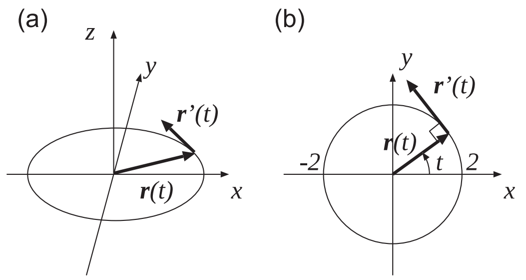

図 2: xy 平面上での回転運動