ベクトル解析演習 演習問題 (1) ベクトル解析の基礎〜ベクトル・内積・外積〜 (補足編)

担当: 金丸隆志

学籍番号: ____________ 氏名: ____________

[補足 1]

ベクトルの和、スカラー倍、内積に関して知っておくべき公式をまとめると以下の通り。ただし、$\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix}$、$\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix}$ とする。

- $p(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}) = p\boldsymbol{a} + p\boldsymbol{b}$ (p はスカラー)
- $|\boldsymbol{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$
- $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} = |\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\theta$ (θ は $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ が成す角度)
- $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$
- $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} = \boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}$
- $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c} = \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c} + \boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}$
- $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a} = |\boldsymbol{a}|^2$
- ベクトル $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ が直交するための必要十分条件は $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} = 0$

[補足 2]

$\boldsymbol{i} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$、$\boldsymbol{j} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$、$\boldsymbol{k} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ をそれぞれ x 軸、y 軸、z 軸 の**基本ベクトル**という。これらはお互いに直交するので、

$$\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{j} = \boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{k} = \boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{i} = 0$$

がすぐわかる。また、長さが 1 であること、すなわち

$$|\boldsymbol{i}| = |\boldsymbol{j}| = |\boldsymbol{k}| = 1$$

もすぐわかるであろう。

　念のため理由を書いておくと、以下のように定義通り計算するだけである。

$$\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{j} = 1\cdot 0 + 0\cdot 1 + 0\cdot 0 = 0$$

$$|\boldsymbol{i}| = \sqrt{1^2 + 0^2 + 0^2} = 1$$

[補足 3]

ベクトル $\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix}$、$\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix}$ に対する外積 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ はベクトルとなり、その成分は以下の公式で計算できる。$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} a_y b_z - a_z b_y \\ a_z b_x - a_x b_z \\ a_x b_y - a_y b_x \end{pmatrix}$。この公式は覚えるべきものであるが、この公式の覚えるための簡便法を図 1 に示す。$\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ の成分を順番に書き出し、その **2 番目から** (a_y **から**) たすきがけの計算を行うことで $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ の成分が作られるわけである。また、外積の直観的な意味を図 2 に示した。ベクトル $\boldsymbol{a}$ から $\boldsymbol{b}$ へ向かって右ネジを回すことを想像しよう。その際右ネジが進む向きを表しているのが外積 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ のベクトルであるというわけである。

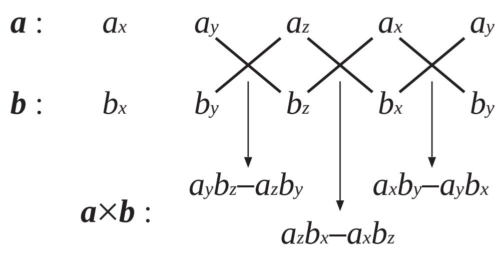

図 1: 外積 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ の成分の暗記法

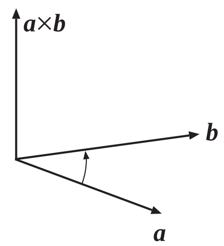

図 2: 外積 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ の理解

[**補足** 4]
物理法則の多くはベクトルで表されている。皆さんが既に知っているものをいくつか挙げると、

- 運動方程式 $m\boldsymbol{a} = \sum_i \boldsymbol{F}_i$ ($\boldsymbol{a}$ は加速度ベクトル、$\sum_i \boldsymbol{F}_i$ は物体に働く力のベクトル和)
- 運動量保存則 $\sum_i m_i\boldsymbol{v}_i =$ 一定 (運動量ベクトルの総和が一定)
- 力が物体に及ぼす仕事 $W = \boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{r}$ ($\boldsymbol{F}$ は物体に働く一定の力、$\boldsymbol{r}$ は物体の移動を表すベクトルで、仕事は内積で表される)

などである。最後の「仕事 $W = \boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{r}$」について補足したのが図 3 である。これまでは水平方向の力 $|\boldsymbol{F}|\cos\theta$ が成す仕事が $|\boldsymbol{F}||\boldsymbol{r}|\cos\theta$ と考えていたかもしれないが、これは実は内積 $\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{r}$ を計算していたわけである。

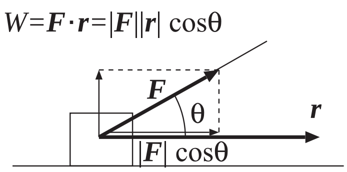

図 3: 物体に働く力 $\boldsymbol{F}$ がなす仕事 W は移動量ベクトル r との内積で表される。