線形代数学 演習問題 (11) 逆行列

担当: 金丸隆志

学籍番号: ＿＿＿＿＿＿＿＿ 氏名: ＿＿＿＿＿＿＿＿

問題 1

以下の行列のが正則かどうか調べ、正則ならば逆行列を求めよ。

(1) $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ -1 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ (2) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$

問題 2

(1) 行列 A の逆行列を求めよ。$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & 5 & 4 \\ 3 & 1 & 5 \end{pmatrix}$

(2) (1) の行列 A は第 10 回問題 1 (2) で解いた以下の連立方程式の左辺に相当する行列である。

$$\begin{cases} 2x + y + 3z &= 0 \\ 4x + 5y + 4z &= -2 \\ 3x + y + 5z &= 1 \end{cases}$$

この連立方程式を $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ と表そう。もし A^{-1} が存在すれば (正則であれば)、この連立方程式の解は $\boldsymbol{x} = A^{-1}\boldsymbol{b}$ と書ける。この方法で解 $\boldsymbol{x}$ を求めよ。これを第 10 回問題 1 (2) の解答と等しくなることを確認せよ。

[**解答**] (1) $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{(3 行目)} - \text{(1 行目)}]{\text{(2 行目)} + \text{(1 行目)}} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 7 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{(2 行目) と (3 行目) 入れ換え}}$

$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 7 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{(2 行目)}\times(-1)} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 4 & 7 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{(3 行目)} - \text{(2 行目)} \times 4]{\text{(1 行目)} - \text{(2 行目)} \times 3}$

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & -2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -3 & 1 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{(3 行目)}\times(-1)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & -2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & -1 & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{(2 行目)} - \text{(3 行目)} \times 2]{\text{(1 行目)} + \text{(3 行目)} \times 3}$

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 7 & -3 & -9 \\ 0 & 1 & 0 & -5 & 2 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & -1 & -4 \end{pmatrix}$ よって、逆行列は $\underline{\begin{pmatrix} 7 & -3 & -9 \\ -5 & 2 & 7 \\ 3 & -1 & -4 \end{pmatrix}}$

(2) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 5 & 6 & 0 & 1 & 0 \\ 7 & 8 & 9 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{(3 行目)} - \text{(1 行目)} \times 7]{\text{(2 行目)} - \text{(1 行目)} \times 4} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -6 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & -6 & -12 & -7 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{(3 行目)}-\text{(2 行目)}\times 2}$

$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -6 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ 3 行目の左半分が全て 0 になってしまったので、これ以上計算ができない。よって <u>この行列は正則ではない</u>。

問題 2

$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 5 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 5 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{(2 行目)}-\text{(1 行目)}\times 2} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -2 & -2 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 5 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{(3 行目)}\times 2} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -2 & -2 & 1 & 0 \\ 6 & 2 & 10 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

$\xrightarrow{\text{(3 行目)}-\text{(1 行目)}\times 3} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -3 & 0 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{(2 行目) と (3 行目) 入れ換え}} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -3 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & -2 & -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

$$\xrightarrow{(2\,\text{行目})\times(-1)} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 3 & 0 & -2 \\ 0 & 3 & -2 & -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{(1\,\text{行目})\ -\ (2\,\text{行目}) \\ (3\,\text{行目})\ -\ (2\,\text{行目})\ \times\ 3}} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 & -2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 3 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -11 & 1 & 6 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\substack{(1\,\text{行目})\ -\ (3\,\text{行目})\ \times\ 4 \\ (2\,\text{行目})\ +\ (3\,\text{行目})}} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 42 & -4 & -22 \\ 0 & 1 & 0 & -8 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -11 & 1 & 6 \end{pmatrix} \xrightarrow{(1\,\text{行目})/2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 21 & -2 & -11 \\ 0 & 1 & 0 & -8 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -11 & 1 & 6 \end{pmatrix}$$

よって、 $A^{-1} = \underline{\begin{pmatrix} 21 & -2 & -11 \\ -8 & 1 & 4 \\ -11 & 1 & 6 \end{pmatrix}}$

さらに、連立方程式から $\boldsymbol{x} = A^{-1}\boldsymbol{b}$ を計算すると

$$\boldsymbol{x} = A^{-1}\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 21 & -2 & -11 \\ -8 & 1 & 4 \\ -11 & 1 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

これより、$\underline{x = -7,\ y = 2,\ z = 4}$。もちろん、これは第十回問題 1(2) と同じである。