線形代数学 演習問題 (9) 同次連立方程式

担当: 金丸隆志

学籍番号:＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿ 氏名:＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

問題

以下の同次連立方程式を行列の基本変形の方法を用いて求めよ。

$$(1)\begin{cases} 2x-y+4z &=0\\ -6x+3y-12z &=0\\ 4x-2y+8z &=0\end{cases}\qquad (2)\begin{cases} x+2y-3z &=0\\ x+4y+7z &=0\\ 3x+8y+z &=0\end{cases}\qquad (3)\begin{cases} 6x+2y+4z+2u &=0\\ 7x+4y-2z-u &=0\\ x+2y-6z+3u &=0\end{cases}$$

((3) は 1 行目と 3 行目を入れ換える基本変形を行うと、若干計算が楽になる)

[解答]

(1) 行の基本変形を用いて解いてゆく。**列の基本変形は用いてはならない**。もちろん行列を用いない通常の解き方でも解けるが、ここでは行列を使って解法を学んでいる。分数計算を減らすため、割算をなるべく後回しにしていることなどにも注意して欲しい。

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 4\\ -6 & 3 & -12\\ 4 & -2 & 8\end{pmatrix} \xrightarrow{(2\text{ 行目})+(1\text{ 行目})\times 3} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 4\\ 0 & 0 & 0\\ 4 & -2 & 8\end{pmatrix} \xrightarrow{(3\text{ 行目})-(1\text{ 行目})\times 2} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 4\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{(1\text{ 行目})/2} \begin{pmatrix} 1 & -1/2 & 2\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

この基本変形より、この行列の像 (Image) の次元は $\dim(\mathrm{Im}\ A)=1$ である。これより $\dim(\mathrm{Ker}\ A)=3-1=2$ であるから、問題の連立方程式の解は 2 次元ベクトル空間をなす (2 つのベクトルの 1 次結合になる) ことがわかる (このことを知らなくても連立方程式は解けるが、知っているとより見通しが良くなる)。

さて、基本変形の結果より $x-(1/2)y+2z=0$ が得られる。$y=t_1,\ z=t_2$ (t_1, t_2 は任意定数) と置くと、$x=(1/2)t_1-2t_2$ より、

$$\begin{pmatrix} x\\ y\\ z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1/2)t_1-2t_2\\ t_1\\ t_2\end{pmatrix} = t_1\begin{pmatrix} 1/2\\ 1\\ 0\end{pmatrix} + t_2\begin{pmatrix} -2\\ 0\\ 1\end{pmatrix}$$

これが答えでも良いのだが、分数を避けるために 1/2 をくくり出して、

$$\begin{pmatrix} x\\ y\\ z\end{pmatrix} = \frac{t_1}{2}\begin{pmatrix} 1\\ 2\\ 0\end{pmatrix} + t_2\begin{pmatrix} -2\\ 0\\ 1\end{pmatrix} = t_1'\begin{pmatrix} 1\\ 2\\ 0\end{pmatrix} + t_2\begin{pmatrix} -2\\ 0\\ 1\end{pmatrix}$$

を答えとすることが多い ($t_1'=\frac{1}{2}t_1$ と置き直した)。確かに 2 次元ベクトル空間となる (2 つのベクトルの 1 次結合になっている) ことがわかるであろう。

(2) 行の基本変形を用いて解いてゆく。**列の基本変形は用いてはならない**。

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3\\ 1 & 4 & 7\\ 3 & 8 & 1\end{pmatrix} \xrightarrow{(2\text{ 行目})-(1\text{ 行目})} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3\\ 0 & 2 & 10\\ 3 & 8 & 1\end{pmatrix} \xrightarrow{(3\text{ 行目})-(1\text{ 行目})\times 3} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3\\ 0 & 2 & 10\\ 0 & 2 & 10\end{pmatrix} \xrightarrow{(2\text{ 行目})/2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3\\ 0 & 1 & 5\\ 0 & 2 & 10\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{(3\text{ 行目})-(2\text{ 行目})\times 2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3\\ 0 & 1 & 5\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix} \xrightarrow{(1\text{ 行目})-(2\text{ 行目})\times 2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -13\\ 0 & 1 & 5\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

この基本変形より、この行列の像 (Image) の次元は $\dim(\mathrm{Im}\ A)=2$ である。これより $\dim(\mathrm{Ker}\ A)=3-2=1$ であるから、問題の連立方程式の解は 1 次元ベクトル空間をなす (このことを知らなくても連立方程式は解けるが、知っているとより見通しが良くなる)。

さて、基本変形の結果より $x-13z=0,\ y+5z=0$ が得られる。$z=t_1$ (t_1 は任意定数) と置くと $x=13t_1$, $y=-5t_1$ と書けるから、

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13t_1 \\ -5t_1 \\ t_1 \end{pmatrix} = t_1 \begin{pmatrix} 13 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix}$$

一つのベクトルの任意定数倍であり、確かに解は 1 次元ベクトル空間をなす。

(3) 行の基本変形を用いて解いてゆく。**列の基本変形は用いてはならない**。

$$\begin{pmatrix} 6 & 2 & 4 & 2 \\ 7 & 4 & -2 & -1 \\ 1 & 2 & -6 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{(1\text{ 行目}) \text{ と } (3\text{ 行目}) \text{ 入れ換え}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -6 & 3 \\ 7 & 4 & -2 & -1 \\ 6 & 2 & 4 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{(2\text{ 行目})-(1\text{ 行目})\times 7} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -6 & 3 \\ 0 & -10 & 40 & -22 \\ 6 & 2 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{(3\text{ 行目})-(1\text{ 行目})\times 6} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -6 & 3 \\ 0 & -10 & 40 & -22 \\ 0 & -10 & 40 & -16 \end{pmatrix} \xrightarrow{(3\text{ 行目})-(2\text{ 行目})} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -6 & 3 \\ 0 & -10 & 40 & -22 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} \xrightarrow{(2\text{ 行目})/(-10)}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -6 & 3 \\ 0 & 1 & -4 & 11/5 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} \xrightarrow{(1\text{ 行目})-(2\text{ 行目})\times 2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -7/5 \\ 0 & 1 & -4 & 11/5 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} \xrightarrow{(3\text{ 行目})/6} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -7/5 \\ 0 & 1 & -4 & 11/5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{(1\text{ 行目})+(3\text{ 行目})\times 7/5} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 11/5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{(1\text{ 行目})-(3\text{ 行目})\times 11/5} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

連立方程式を解く際は**列の基本変形は用いてはいけない**ので変形は上記までであるが、3 行目に 1 が残っていることから、この行列の像 (Image) の次元は $\dim(\mathrm{Im}\ A) = 3$ であることがわかる。これより $\dim(\mathrm{Ker}\ A) = 4 - 3 = 1$ であるから、問題の連立方程式の解は 1 次元ベクトル空間をなす (このことを知らなくても連立方程式は解けるが、知っているとより見通しが良くなる)。なお、Kernel の次元の計算における "4" は「変数の個数 (元の空間の次元)」であり、「方程式の個数 (3)」ではないことに注意 (言い替えると、$m \times n$ 行列の n を用いて $\dim(\mathrm{Ker}\ A) = n - \dim(\mathrm{Im}\ A)$)。

さて、基本変形の結果より $x + 2z = 0,\ y - 4z = 0,\ u = 0$ が得られる。$z = t_1$ (t_1 は任意定数) と置くと $x = -2t_1$, $y = 4t_1$ と書けるから、

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2t_1 \\ 4t_1 \\ t_1 \\ 0 \end{pmatrix} = t_1 \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

一つのベクトルの任意定数倍であり、確かに解は 1 次元ベクトル空間をなす。