線形代数学 演習問題 (8) 行列の階数

担当: 金丸隆志

学籍番号: ＿＿＿＿＿＿ 氏名: ＿＿＿＿＿＿

問題

以下の行列の階数 (rank) を求めよ。

(1) $\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ (2) $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & -4 \end{pmatrix}$ (3) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 2 & 5 & -1 & 5 \\ 0 & -3 & 3 & 7 \end{pmatrix}$

[**解答**]

(1) まず行の基本変型を行なう。

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{(1\text{ 行目})\times(-1)} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{(2\text{ 行目})+(1\text{ 行目})\times(-3)} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 7 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{(3\text{ 行目})+(1\text{ 行目})\times(-3)} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 7 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{(2\text{ 行目})/7} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \\ 0 & 8 \end{pmatrix} \xrightarrow{(3\text{ 行目})-(2\text{ 行目})\times 8} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{(1\text{ 行目})+(2\text{ 行目})\times 2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$ よって <u>rank は 2</u>。

(2) まず行の基本変型を行なう。

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow{(2\text{ 行目})-(1\text{ 行目})} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow{(3\text{ 行目})+(1\text{ 行目})} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 4 & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow{(2\text{ 行目})\times(-1)}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 4 & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow{(3\text{ 行目})-(2\text{ 行目})\times 4} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{(1\text{ 行目})-(2\text{ 行目})\times 3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

次に列の基本変型を行なう。

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{(3\text{ 列目})-(1\text{ 列目})\times 3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{(3\text{ 列目})+(2\text{ 列目})} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$ よって <u>rank は 2</u>。

(3) まず行の基本変型を行なう。

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 2 & 5 & -1 & 5 \\ 0 & -3 & 3 & 7 \end{pmatrix} \xrightarrow{(2\text{ 行目})-(1\text{ 行目})\times 2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & -3 & 3 & 7 \end{pmatrix} \xrightarrow{(3\text{ 行目})+(2\text{ 行目})\times 3} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{(1\text{ 行目})-(2\text{ 行目})\times 2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{(3\text{ 行目})/4} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{(2\text{ 行目})+(3\text{ 行目})} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{(1\text{ 行目})-(3\text{ 行目})\times 5} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

次に列の基本変型を行なう。

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{(3\text{ 列目})\text{ と }(4\text{ 列目})\text{ 入れ換え}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{(4\text{ 列目})-(1\text{ 列目})\times 2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{(4\text{ 列目})+(2\text{ 列目})} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$ よって <u>この行列の rank は 3</u>。