線形代数学 演習問題 (4) ベクトル空間

担当: 金丸隆志

学籍番号: ______________ 氏名: ______________

問題 1

行列 $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix}$、$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ に対し、以下を計算せよ。

(1) AB (2) BA (3) ${}^t(AB)$ (4) ${}^tB{}^tA$

[解答]

3×3 の正方行列なので、積は自由に計算できる。

(1) $AB = \begin{pmatrix} 2+0+1 & 2-1+0 & 0+1-1 \\ 0+0-1 & 0-2+0 & 0+2+1 \\ 3+0+2 & 3+0+0 & 0+0-2 \end{pmatrix}$

$$= \underline{\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & 3 \\ 5 & 3 & -2 \end{pmatrix}}$$

(2) $BA = \begin{pmatrix} 2+0+0 & 1+2+0 & 1-1+0 \\ 0+0+3 & 0-2+0 & 0+1+2 \\ 2+0-3 & 1+0+0 & 1+0-2 \end{pmatrix}$

$$= \underline{\begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 3 & -2 & 3 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}}$$

(1) と (2) の結果を見ると、$AB \neq BA$ である。

(3) (1) の結果の行と列 (横と縦) を入れ換えれば良い。

$${}^t(AB) = \underline{\begin{pmatrix} 3 & -1 & 5 \\ 1 & -2 & 3 \\ 0 & 3 & -2 \end{pmatrix}}$$

(4) ${}^tA = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ と ${}^tB = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ より

$$\begin{aligned} {}^tB{}^tA &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2+0+1 & 0+0-1 & 3+0+2 \\ 2-1+0 & 0-2+0 & 3+0+0 \\ 0+1-1 & 0+2+1 & 0+0-2 \end{pmatrix} \\ &= \underline{\begin{pmatrix} 3 & -1 & 5 \\ 1 & -2 & 3 \\ 0 & 3 & -2 \end{pmatrix}} \end{aligned}$$

(3) と (4) を見ると、${}^t(AB) = {}^tB{}^tA$ である。

問題 2

$\boldsymbol{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$、$\boldsymbol{a}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$、$\boldsymbol{a}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ が V_3 を生成するか調べよ。

[解答]

任意のベクトル $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ が $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3$ の一次結合 $\boldsymbol{x} = c_1\boldsymbol{a}_1 + c_2\boldsymbol{a}_2 + c_3\boldsymbol{a}_3$ で表されるとしよう。このとき、3 成分について成り立つ式を書き下すと、

$$\begin{aligned} c_1 + 2c_2 &= x \quad &\text{(i)} \\ -c_2 - c_3 &= y \quad &\text{(ii)} \\ c_1 + 2c_3 &= z \quad &\text{(iii)} \end{aligned}$$

x, y, z を単なる定数と思って、この連立方程式から c_1, c_2, c_3 を求める。$2\times$ (ii) + (iii) より

$$c_1 - 2c_2 = 2y + z \qquad \text{(iv)}$$

(i) + (iv) を計算して整理すると、

$$c_1 = \frac{1}{2}(x + 2y + z)$$

同様に、残りの c_2, c_3 は

$$\begin{aligned} c_2 &= \frac{1}{4}(x - 2y - z) \\ c_3 &= \frac{1}{4}(-x - 2y + z) \end{aligned}$$

と求められる。よって、任意のベクトル $\boldsymbol{x}$ は $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3$ を用いて

$$\boldsymbol{x} = \frac{1}{2}(x+2y+z)\boldsymbol{a}_1 + \frac{1}{4}(x-2y-z)\boldsymbol{a}_2 + \frac{1}{4}(-x-2y+z)\boldsymbol{a}_3$$

と表されるから、<u>$\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3$ は V_3 を生成する</u>。

問題 3

$\boldsymbol{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$、$\boldsymbol{a}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$、$\boldsymbol{a}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ が V_3 を生成するか調べよ。

[**解答**]

任意のベクトル $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ が $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3$ の一次結合 $\boldsymbol{x} = c_1\boldsymbol{a}_1 + c_2\boldsymbol{a}_2 + c_3\boldsymbol{a}_3$ で表されるとしよう。このとき、3 成分について成り立つ式を書き下すと、

$$\begin{aligned} c_1 + 2c_2 + c_3 &= x \qquad \text{(v)} \\ -c_2 + c_3 &= y \qquad \text{(vi)} \\ c_1 + 3c_3 &= z \qquad \text{(vii)} \end{aligned}$$

x, y, z を単なる定数と思って、この連立方程式から c_1, c_2, c_3 を求める。(v) + 2 × (vi) より

$$c_1 + 3c_3 = x + 2y \qquad \text{(viii)}$$

(vii), (viii) 式を見ると、$c_1 + 3c_3$ に関する方程式が 2 つ表われたが、これが意味を持つためには

$$x + 2y = z \qquad \text{(ix)}$$

でなければならない。(ix) 式はベクトル $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ の成分に制限が課されることを意味する。しかし、$\boldsymbol{x}$ は任意のベクトルであったから、制限が課されるということは矛盾する。これは、$\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3$ は V_3 の任意のベクトルを生成できないことを意味する。

すなわち、$\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3$ は V_3 を生成しない。

補足すると、簡単な計算でわかるように、$3\boldsymbol{a}_1 - \boldsymbol{a}_2 = \boldsymbol{a}_3$ が成立している。すなわち、$\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3$ **は同一平面上にあるので、その一次結合 (線形結合) は 3 次元ベクトル空間** V_3 **を生成できない**。