線形代数学 演習問題 (3) 行列の演算

担当: 金丸隆志

学籍番号: ______________ 氏名: ______________

問題 1

行列 $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix}$、$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ に対し、以下を計算せよ。

(1) $A - B$ (2) $2A + 3B$

[解答]

(1) $A-B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \underline{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & -2 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}}$

(2) $2A+3B = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 0 & 4 & -2 \\ 6 & 0 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 3 & 0 \\ 0 & -3 & 3 \\ 3 & 0 & -3 \end{pmatrix} = \underline{\begin{pmatrix} 7 & 5 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 9 & 0 & 1 \end{pmatrix}}$

問題 2

$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$、$B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & -2 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}$、$C = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ とする。次の中で積が定義されているものを選び、積を求めよ。

(1) AB (2) AC (3) BA
(4) BC (5) CA

[解答]

まず、$A: 3 \times 4$ 行列、$B: 3 \times 3$ 行列、$C: 4 \times 3$ 行列であることに注意する。よって、(1) は (3×4 行列) $\times$ (3×3 行列)、(4) は (3×3 行列) $\times$ (4×3 行列) であるからともに <u>積は存在しない</u>。

(2) (3×4 行列) $\times$ (4×3 行列) であるから、積は 3×3 行列になる。

$$AC = \begin{pmatrix} 1+1+0+0 & 3+0+0+2 & 0+1+0+4 \\ 0-1-1+0 & 0+0+1+1 & 0-1+0+2 \\ 1+0+1+0 & 3+0-1+0 & 0+0+0+0 \end{pmatrix}$$

$$= \underline{\begin{pmatrix} 2 & 5 & 5 \\ -2 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}}$$

(3) (3×3 行列) $\times$ (3×4 行列) であるから、積は 3×4 行列になる。

$$BA = \begin{pmatrix} 2+0+3 & 2+0+0 & 0+0-3 & 4+0+0 \\ 1+0-2 & 1-1+0 & 0+1+2 & 2+1+0 \\ 0+0+0 & 0-3+0 & 0+3+0 & 0+3+0 \end{pmatrix}$$

$$= \underline{\begin{pmatrix} 5 & 2 & -3 & 4 \\ -1 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & -3 & 3 & 3 \end{pmatrix}}$$

(5) (4×3 行列) $\times$ (3×4 行列) であるから、積は 4×4 行列になる。

$$CA = \begin{pmatrix} 1+0+0 & 1-3+0 & 0+3+0 & 2+3+0 \\ 1+0+1 & 1+0+0 & 0+0-1 & 2+0+0 \\ -1+0+0 & -1-1+0 & 0+1+0 & -2+1+0 \\ 0+0+2 & 0-1+0 & 0+1-2 & 0+1+0 \end{pmatrix}$$

$$= \underline{\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 5 \\ 2 & 1 & -1 & 2 \\ -1 & -2 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}}$$

問題 3

2 次元平面上の原点周りの反時計回りの角度 θ の回転は $\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ で表わされる。角度 $\pi/6$ (30 度) の回転を表わす $A = \begin{pmatrix} \cos(\pi/6) & -\sin(\pi/6) \\ \sin(\pi/6) & \cos(\pi/6) \end{pmatrix}$ と角度 $\pi/3$ (60 度) の回転を表わす $B = \begin{pmatrix} \cos(\pi/3) & -\sin(\pi/3) \\ \sin(\pi/3) & \cos(\pi/3) \end{pmatrix}$ の積 BA を計算し、その行列が角度 $\pi/2$ (90 度) の回転に対応することを示せ。(行列の積は線形変換 2 回に相当する)

[解答]

$$BA = \begin{pmatrix} 1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{3}/2 & -1/2 \\ 1/2 & \sqrt{3}/2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \sqrt{3}/4 - \sqrt{3}/4 & -1/4 - 3/4 \\ 3/4 + 1/4 & -\sqrt{3}/4 + \sqrt{3}/4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \cos(\pi/2) & -\sin(\pi/2) \\ \sin(\pi/2) & \cos(\pi/2) \end{pmatrix}$$