フーリエ変換演習 演習問題 (9) フーリエ変換最終回 (解答編)

担当: 金丸隆志

学籍番号: ____________ 氏名: ____________

[問題 1] フーリエ変換の計算

図 1 のような概形を持つ非周期信号 $g(t)$ のフーリエ変換 $G(f)$ を求めよ。なお、a は $a > 0$ を満たす実数定数である。

$$g(t) = e^{-a|t|} = \begin{cases} e^{-at} & t \geq 0 \\ e^{at} & t < 0 \end{cases} \tag{1}$$

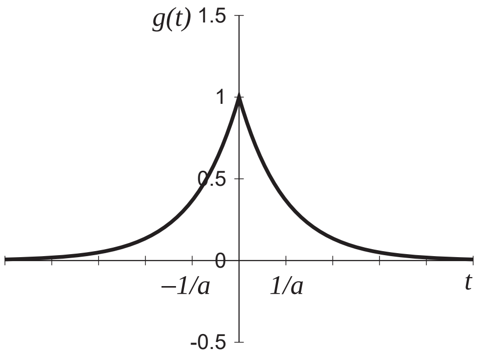

図 1: 関数 $g(t)$ のグラフ

なお、以下の極限は利用してよい。

$$\lim_{t\to\infty} e^{(-a\pm 2\pi i f)t} = 0 \tag{2}$$

[問題 1 解答]

$$\begin{aligned}
G(f) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-a|t|} e^{-2\pi i f t} dt \\
&= \int_{-\infty}^{0} e^{at} e^{-2\pi i f t} dt + \int_{0}^{\infty} e^{-at} e^{-2\pi i f t} dt \\
&= \int_{-\infty}^{0} e^{(a-2\pi i f)t} dt + \int_{0}^{\infty} e^{-(a+2\pi i f)t} dt \\
&= \left[\frac{1}{a-2\pi i f} e^{(a-2\pi i f)t}\right]_{-\infty}^{0} \\
&\quad + \left[-\frac{1}{a+2\pi i f} e^{-(a+2\pi i f)t}\right]_{0}^{\infty} \\
&= \frac{1}{a-2\pi i f} + \frac{1}{a+2\pi i f} \\
&= \frac{1}{a-2\pi i f}\cdot\frac{a+2\pi i f}{a+2\pi i f} + \frac{1}{a+2\pi i f}\cdot\frac{a-2\pi i f}{a-2\pi i f} \\
&= \frac{a+2\pi i f + a - 2\pi i f}{a^2+(2\pi f)^2} \\
&= \frac{2a}{a^2+(2\pi f)^2}
\end{aligned}$$

[問題 2] 指数関数のフーリエ変換 $G(f)$ の理解

[問題 1] の信号の振幅スペクトル $|G(f)|$ を計算し、そのグラフの概形を周波数 f の関数としてスケッチせよ。前回同様、$f \geq 0$ の範囲のみで良い。

[問題 2 解答]

$G(f)$ は虚部が 0 の実数であり、さらに $a > 0$ であることより、ただちに

$$G(f) = |G(f)| = \frac{2a}{a^2+(2\pi f)^2} \tag{3}$$

が得られる。これを図示すると図 2 のようになる。

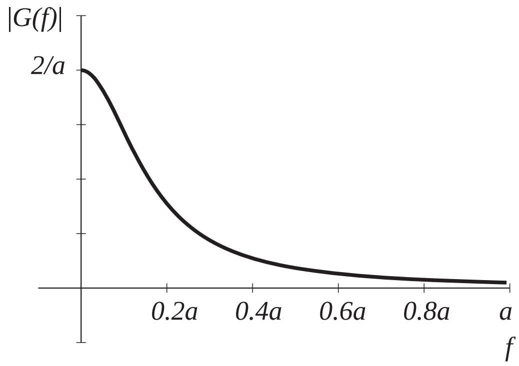

図 2: 図 1 の関数 $g(t)$ の振幅スペクトル $|G(f)|$。$f \geq 0$ の範囲のみ描いた。

なお、この関数形のスペクトルはローレンチアン、またはローレンツスペクトルと呼ばれ、ランダム信号の**パワースペクトル**においてしばしばみられる (教科書参照)。