フーリエ変換演習 演習問題 (8) フーリエ変換の計算 (問題編)

担当: 金丸隆志

学籍番号: ____________ 氏名: ____________

[問題 1] 複素フーリエ級数展開からフーリエ変換へ

図 1 のような概形を持つ非周期信号 $g(t)$ のフーリエ変換 $G(f)$ を求めよ。なお、a は $a > 0$ を満たす実数定数である。

$$g(t) = \begin{cases} e^{-at} & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases} \tag{1}$$

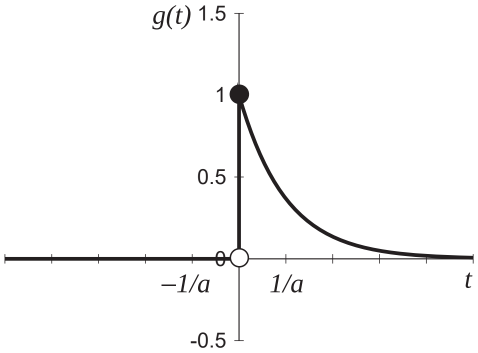

図 1: 関数 $g(t)$ のグラフ

なお、以下の極限は利用してよい。

$$\begin{aligned}
\lim_{t\to\infty} e^{-(a+2\pi i f)t} &= \lim_{t\to\infty} e^{-at} e^{-2\pi i f t} \\
&= \lim_{t\to\infty} e^{-at}(\cos(2\pi f t) - i\sin(2\pi f t)) \\
&= \lim_{t\to\infty} e^{-at}\cos(2\pi f t) \\
&\quad -i \lim_{t\to\infty} e^{-at}\sin(2\pi f t) \\
&= 0 - i \times 0 = 0
\end{aligned}$$

[問題 2] 指数関数のフーリエ変換 $G(f)$ の理解

$G(f)$ は「周波数 f をもつ周期信号の重み」を表すのだが、複素フーリエ係数 c_n と同様、$G(f)$ は複素数なのでそのままでは直観的に理解しにくい。そこで、$G(f)$ の絶対値 $|G(f)|$ を用いることが多い。$|G(f)|$ のことを**振幅スペクトル**と呼ぶ。

そこで、振幅スペクトル $|G(f)|$ を計算し、そのグラフの概形を周波数 f の関数としてスケッチせよ。なお、複素フーリエ級数展開と同様、f は正負両方の値を取るのだが、慣習的に $f \geq 0$ のみのグラフを書くことが多い。これは、$|G(f)|$ が原点に対して左右対称になることが一般に知られており、$f \geq 0$ の範囲のみを書けば自動的に $f < 0$ についてもわかるためである (詳細は教科書参照)。