フーリエ変換演習 演習問題 (7) フーリエ変換を学ぶ準備 (解答編)

担当: 金丸隆志

学籍番号: ____________ 氏名: ____________

[問題 1] 周期と周波数、角周波数

関東では家庭用の交流電源の周波数 f は 50 [Hz] であるが、この信号の周期 T と角周波数 ω を計算せよ。単位も正しくつけること。さらに、同様の計算を関西での交流電源の周波数 60 [Hz] に対しても行え。

[問題 1 解答]

50 [Hz] の場合、

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{f} = 1/50 = \underline{0.02[\mathrm{s}] = 20[\mathrm{ms}]} \\ \omega &= 2\pi f \sim 2 \times 3.1415 \times 50 \sim \underline{314[\mathrm{rad/s}]} \end{aligned}$$

60 [Hz] の場合、

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{f} = 1/60 = \underline{0.0167[\mathrm{s}] = 16.7[\mathrm{ms}]} \\ \omega &= 2\pi f \sim 2 \times 3.1415 \times 60 \sim \underline{377[\mathrm{rad/s}]} \end{aligned}$$

である。

[問題 2] 複素数の絶対値 (再考 1)

演習問題 (4) **[問題 2]** で学んだように、複素数 $z = x + iy$ の絶対値は

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

と計算されるのだった。しかし、$z = \frac{a+ib}{c+id}$ のような形の複素数は、$z = x + iy$ の形をしていないので、上記の公式をそのままでは使えない。ここで、$\frac{a+ib}{c+id}$ に対して分子と分母の両方に分母の複素共役 $c - id$ を掛ければ $z = x + iy$ の形に変形できるのだった (演習問題 (5) **[補足 2]**)。そうすることで上記の絶対値の公式が使えるようになる。以上の方法で、以下の複素数の絶対値を計算せよ。

(a) $\dfrac{2}{1-i}$ (b) $\dfrac{1-i}{1+i}$ (c) $\dfrac{i}{2-3i}$ (d) $\dfrac{1}{i}$

[問題 2 解答]

(a)

$$\begin{aligned} \frac{2}{1-i} &= \frac{2}{1-i} \cdot \frac{1+i}{1+i}, \\ &= \frac{2(1+i)}{1+1} = 1 + i \end{aligned}$$

よって、$\sqrt{1^2 + 1^2} = \underline{\sqrt{2}}$.

(b)

$$\begin{aligned} \frac{1-i}{1+i} &= \frac{1-i}{1+i} \cdot \frac{1-i}{1-i}, \\ &= \frac{(1-1) - 2i}{1+1} = -i \end{aligned}$$

よって、$\sqrt{0^2 + (-1)^2} = \underline{1}$.

(c)

$$\begin{aligned} \frac{i}{2-3i} &= \frac{i}{2-3i} \cdot \frac{2+3i}{2+3i}, \\ &= \frac{-3+2i}{2^2+3^2} = -\frac{3}{13} + \frac{2}{13}i \end{aligned}$$

よって、$\sqrt{\left(-\frac{3}{13}\right)^2 + \left(\frac{2}{13}\right)^2} = \underline{\sqrt{\frac{1}{13}}}$.

(d)

$$\begin{aligned} \frac{1}{i} &= \frac{1}{i} \cdot \frac{-i}{-i}, \\ &= -i \end{aligned}$$

よって、$\sqrt{0^2 + (-1)^2} = \underline{1}$.

[問題 3] 複素数の絶対値 (再考 2)

演習問題 (4) **[問題 3]** によると、z の絶対値 $|z|$ は

$$|z| = \sqrt{z \cdot z^*} \tag{1}$$

とも計算できるのだった。ただし、$z = x + iy$ に対して $z^* = x - iy$ を z の**複素共役**という。この方法を用いて **[問題 2]** の 4 つの複素数の絶対値をそれぞれ計算せよ。もちろん答えは同じになるので、異なる結果が得られた場合はどちらかが間違っていることになる。なお、複素共役については **[補足 3]** も参考にすること。

[問題 3 解答]

(a) (1) 式と **[補足 3]** (2) 式を用いて計算していく。

$$\begin{aligned} \left|\frac{2}{1-i}\right| &= \sqrt{\frac{2}{1-i} \cdot \left(\frac{2}{1-i}\right)^*} \\ &= \sqrt{\frac{2}{1-i} \cdot \frac{2}{1+i}} \\ &= \sqrt{\frac{4}{(1-i)(1+i)}} = \sqrt{\frac{4}{2}} = \underline{\sqrt{2}} \end{aligned}$$

(b) 同様に計算する。

$$\left|\frac{1-i}{1+i}\right| = \sqrt{\frac{1-i}{1+i} \cdot \left(\frac{1-i}{1+i}\right)^*}$$

$$= \sqrt{\frac{1-i}{1+i} \cdot \frac{1+i}{1-i}} = \underline{1}$$

(c) 同様に計算する。

$$\begin{aligned}
\left|\frac{i}{2-3i}\right| &= \sqrt{\frac{i}{2-3i} \cdot \left(\frac{i}{2-3i}\right)^*} \\
&= \sqrt{\frac{i}{2-3i} \cdot \frac{-i}{2+3i}} \\
&= \sqrt{\frac{-i^2}{2^2-(3i)^2}} = \underline{\sqrt{\frac{1}{13}}}
\end{aligned}$$

(d) 同様に計算する。

$$\begin{aligned}
\left|\frac{1}{i}\right| &= \sqrt{\frac{1}{i} \cdot \left(\frac{1}{i}\right)^*} \\
&= \sqrt{\frac{1}{i} \cdot \frac{1}{-i}} = \sqrt{\frac{1}{-i^2}} = \underline{1}
\end{aligned}$$