フーリエ変換演習 演習問題 (5) 複素フーリエ級数展開を学ぶための準備２ (補足編)

担当: 金丸隆志

学籍番号: ______________ 氏名: ______________

[補足 1] 複素数の極形式

前回までに、複素数の記述法として $x+iy$ と $e^{i\theta}$ の二つを学んだ。実は $e^{i\theta}$ に 0 以上の実数 r をかけた $re^{i\theta}$ を複素数の**極形式**と言い、任意の複素数は $x+iy$ と $re^{i\theta}$ の両方の形で書ける。

$$re^{i\theta} = r\cos\theta + ir\sin\theta$$

であることに注意すると、

$$x = r\cos\theta, \quad y = r\sin\theta,$$

の関係がある。逆を導けば、

$$r = \sqrt{x^2+y^2},$$
$$\cos\theta = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \quad \sin\theta = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}},$$

の関係がある。

[補足 2] 分母にある虚数単位の処理

以下のように、分母に虚数単位 i の現われている複素数は $x+iy$ の形をしていないので注意が必要である。

$$\frac{1}{a+ib}$$

分母の虚数単位を分子に持っていくためには、「分母の複素共役 $a-ib$ を分子と分母両方に掛ける」と良い。実際にやってみると、

$$\begin{aligned}\frac{1}{a+ib} &= \frac{1}{a+ib}\cdot\frac{a-ib}{a-ib} \\ &= \frac{a-ib}{(a+ib)(a-ib)} \\ &= \frac{a-ib}{a^2+b^2} \\ &= \frac{a}{a^2+b^2} - i\frac{b}{a^2+b^2}\end{aligned}$$

となり、確かに $z=x+iy$ の形に変形することができた。

[補足 3] 複素数 $e^{i\frac{2\pi nt}{T}}$ について

工学でしばしば登場する関数 $e^{i\frac{2\pi nt}{T}}$ について解説しておこう。様々なバリエーションが存在するが、ポイントは e の肩に虚数単位 i と時刻 t が登場していること、すなわちこの関数は時間とともに変化することである。まず、オイラーの公式より

$$e^{i\frac{2\pi nt}{T}} = \cos\left(\frac{2\pi nt}{T}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi nt}{T}\right)$$

が成り立つ。この右辺にはこれまでのフーリエ級数展開で何度も登場した「周期 T/n で時間的に変化する三角関数」が現れていることに注意して欲しい。ここで $\theta = \frac{2\pi nt}{T}$ と置き、$e^{i\frac{2\pi nt}{T}}$ を複素平面上に表示したのが図 1 である。角度 $\theta = \frac{2\pi nt}{T}$ が周期 T/n で円周

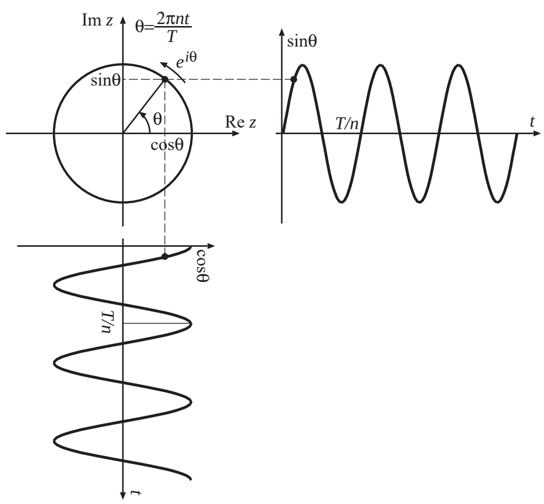

図 1: 複素数 $e^{i\theta}$ の振動

上を反時計周りに回転し、それにつれて x 座標、y 座標が それぞれ cos、sin で振動することがわかる。

このように振動を指数関数で表すと数学的に便利なことが多いため、物理学や電磁気学においては周期的に変動する信号を $e^{i\frac{2\pi nt}{T}}$、$e^{i2\pi ft}$、$e^{i\omega t}$ などと表すことが多い (f は周波数、ω は角周波数と呼ばれる)。これらを見たときに即座に図 1 のようなイメージが頭に浮かぶ様になることを目指そう。

なお、電磁気学では「電流 i」と混同しないよう虚数単位 i を j と書くことが多いことを注意しておく。

[補足 4] 実数の 0 乗

0 でない実数 a の 0 乗はいくつだったか覚えているだろうか？たまに間違える学生がいるので注意しておく。

$$a^0 = 1$$