フーリエ変換演習 演習問題 (1) フーリエ変換を学ぶための準備

担当: 金丸隆志

学籍番号: ________________ 氏名: ________________

[問題 1] 三角関数の周期

以下の関数 $g(t)$ の周期を求めよ。角度は全てラジアン単位で表されているものとする。

(a) $g(t) = \cos t$　　(b) $g(t) = \sin(2\pi t)$

(c) $g(t) = \cos\left(\frac{2\pi t}{T}\right)$　　(d) $g(t) = \sin\left(\frac{2\pi n t}{T}\right)$

[問題 1 解答]

(a) $\cos t$ と $\sin t$ の周期はともに 2π である。

$2\pi[\mathrm{rad}] = 360°$ であることを (もし) 忘れていたら、ここで確実に覚え直すこと。

(b) これ以降の解き方は、$\cos(\cdot)$ または $\sin(\cdot)$ のカッコの中身を 「$= 2\pi$」と置き、それを t について解けば良い。すなわち、(b) については

$$2\pi t = 2\pi \tag{1}$$

$$t = 1 \tag{2}$$

より 周期は 1 である。

(c) $\frac{2\pi t}{T} = 2\pi$ を t について解くと $t = T$。よって 周期は T である。

(d) $\frac{2\pi n t}{T} = 2\pi$ を t について解くと $t = \frac{T}{n}$。よって 周期は T/n である。

この (d) の関数 $g(t)$ はフーリエ級数展開において重要であるので見慣れておくようにしよう。n を整数として変化させた際の $g(t)$ の変化を図 1 に示す。周期が n 分の 1 に (振動の速さが n 倍に) なっている。

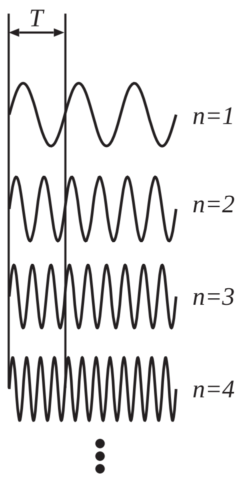

図 1: n を変化させたときの関数の変化

[問題 2] 三角関数の微分

以下の関数 $g(t)$ の微分 $g'(t)$ を計算せよ。

(a) $g(t) = \cos\left(\frac{2\pi n t}{T}\right)$　　(b) $g(t) = \sin\left(\frac{2\pi n t}{T}\right)$

[問題 2 解答]

合成関数の微分より、以下のように計算されることを思い出そう。

$$\frac{d}{dt}\cos(at) = -a\sin(at) \tag{3}$$

$$\frac{d}{dt}\sin(at) = a\cos(at) \tag{4}$$

これらを用いると、

(a) $$g'(t) = -\frac{2\pi n}{T}\sin\left(\frac{2\pi n t}{T}\right)$$

(b) $$g'(t) = \frac{2\pi n}{T}\cos\left(\frac{2\pi n t}{T}\right)$$

と計算される。

[問題 3] 三角関数の積分

以下の関数 $g(t)$ の不定積分 $\int g(t)dt$ を計算せよ。

(a) $g(t) = \cos\left(\frac{2\pi n t}{T}\right)$　　(b) $g(t) = \sin\left(\frac{2\pi n t}{T}\right)$

[問題 3 解答]

積分は微分の逆であるから、以下の公式が成り立つことを思い出そう (C は積分定数)。

$$\int \cos(at)dt = \frac{1}{a}\sin(at) + C \tag{5}$$

$$\int \sin(at)dt = -\frac{1}{a}\cos(at) + C \tag{6}$$

これらを用いると、

(a) $$\int g(t)\,dt = \frac{T}{2\pi n}\sin\left(\frac{2\pi n t}{T}\right) + C$$

(b) $$\int g(t)\,dt = -\frac{T}{2\pi n}\cos\left(\frac{2\pi n t}{T}\right) + C$$

と計算される (C は積分定数)。

[問題 4] 部分積分の復習

部分積分の公式

$$\int f(t)g'(t)dt = f(t)g(t) - \int f'(t)g(t)dt \qquad (7)$$

を用いて、以下の不定積分を計算せよ。

$$\text{(a)} \quad \int t\, \sin t\, dt \qquad \text{(b)} \quad \int t\, \cos t\, dt$$

[問題 4 解答]

(a) $f(t) = t$、$g'(t) = \sin t$ として計算する。

$$\begin{aligned}\int t\, \sin t\, dt &= -t\, \cos t - \int (-\cos t)dt \\ &= -t\, \cos t + \sin t + C\end{aligned}$$

(b) $f(t) = t$、$g'(t) = \cos t$ として計算する。

$$\begin{aligned}\int t\, \cos t\, dt &= t\, \sin t - \int \sin t dt \\ &= t\, \sin t + \cos t + C\end{aligned}$$

((a)、(b) ともに C は積分定数)