微分方程式論 (9) 定数係数の 2 階斉次線形微分方程式 (3) (補足編)

担当: 金丸隆志

学籍番号: ＿＿＿＿＿＿＿＿ 氏名: ＿＿＿＿＿＿＿＿

[補足 1] 例題

以下の定数係数の 2 階斉次線形微分方程式を解け。ただし、α は実数定数であるとする。

$$\frac{d^2x}{dt^2} - 2\alpha\frac{dx}{dt} + \alpha^2 x = 0 \tag{1}$$

[解法 Step 1]

$x = e^{\lambda t}$ (λ は定数) の形の解を仮定しよう。$x = e^{\lambda t}$ を t で微分すると、$x' = \lambda e^{\lambda t}$ および $x'' = \lambda^2 e^{\lambda t}$ が得られるので、これを問題の微分方程式 (1) に代入すると、

$$\begin{aligned} \lambda^2 e^{\lambda t} - 2\alpha\lambda e^{\lambda t} + \alpha^2 e^{\lambda t} &= 0 \\ (\lambda^2 - 2\alpha\lambda + \alpha^2)e^{\lambda t} &= 0 \end{aligned}$$

ここで、$e^{\lambda t} > 0$ は 0 には成り得ないので、$\lambda^2 - 2\alpha\lambda + \alpha^2 = 0$ となるが、これが前回登場した特性方程式である。これを解くと

$$\begin{aligned} (\lambda - \alpha)^2 &= 0 \\ \lambda &= \alpha \ (\text{重解}) \end{aligned}$$

よって、$x = e^{\alpha t}$ が問題の微分方程式 (1) の解であることがわかった。

[解法 Step 2]

前回は 2 つの異なる解 $x = e^{\alpha t}, e^{\beta t}$ が現われたので、2 つの任意定数 C_1 と C_2 を用いた線形和 $x = C_1 e^{\alpha t} + C_2 e^{\beta t}$ を問題の微分方程式 (1) の一般解とすることができたが、今回は $x = e^{\alpha t}$ しかないのでそれができない。ではどうするか、というのが今回のポイント。

方針はもう一つの解を発見的な方法で見つけて

$$x = C_1 e^{\alpha t} + C_2(\text{もう一つの解})$$

とする、というものである。今回のように特性方程式が重解になる場合はほとんどパターン化しており、「もう一つの解」として $te^{\alpha t}$ を仮定して話を進めることになる。

[解法 Step 3]

もう一つの解として $x = te^{\alpha t}$ を仮定し、この $x(t)$ が問題の微分方程式 (1) を満たすことを確認する。あらかじめ 1 階微分と 2 階微分を計算しておくと、

$$\begin{aligned} x' &= e^{\alpha t} + \alpha te^{\alpha t} \\ x'' &= \alpha e^{\alpha t} + \alpha e^{\alpha t} + \alpha^2 te^{\alpha t} \end{aligned}$$

となる。積の微分 $(fg)' = f'g + fg'$ を使っていることに注意。これを問題の微分方程式 (1) の左辺に代入すると、

$$\begin{aligned} (\text{左辺}) &= (\alpha e^{\alpha t} + \alpha e^{\alpha t} + \alpha^2 te^{\alpha t}) \\ &\quad -2\alpha(e^{\alpha t} + \alpha te^{\alpha t}) + \alpha^2 te^{\alpha t} \\ &= (2\alpha + \alpha^2 t - 2\alpha - 2\alpha^2 t + \alpha^2 t)e^{\alpha t} \\ &= 0 = (\text{右辺}) \end{aligned}$$

よって問題の微分方程式 (1) が満たされることがわかった。すなわち、 $x = te^{\alpha t}$ も問題の微分方程式 (1) の解の一つである。

[解法 Step 4]

以上から、問題の微分方程式の**一般解**は

$$x = C_1 e^{\alpha t} + C_2 te^{\alpha t} = \underline{(C_1 + C_2 t)e^{\alpha t}}$$

[解法に関するコメント]

この問題の解答は、[解法 Step 1] → [解法 Step 3] → [解法 Step 4] と進むこと。慣れてきたら [解法 Step 3] も飛ばして良いのだが、**今回の演習では [解法 Step 3] を飛ばさずに確かめること。そうしないと間違いとする。**