微分方程式論 (8) 定数係数の 2 階斉次線形微分方程式 (2) (解答編)

担当: 金丸隆志

学籍番号: ________________ 氏名: ________________

[問題 1]

以下の微分方程式を解け。

(a) $x'' + 2x' + 2x = 0$

(b) $x'' + 4x = 0$

[問題 1 解説]

(a) 特性方程式 $\lambda^2 + 2\lambda + 2 = 0$ を解くと、$\lambda = -1 \pm i$。よって、$\underline{x = e^{-t}(C_1 \cos t + C_2 \sin t)}$ (C_1, C_2 は任意定数)。

(b) 特性方程式 $\lambda^2 + 4 = 0$ を解くと、$\lambda = \pm 2i$。よって、$\underline{x = C_1 \cos 2t + C_2 \sin 2t}$ (C_1, C_2 は任意定数)。

[問題 2]

ばね定数 k のばねにつながれた質量 m のおもりの運動方程式

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx$$

を解け。x はばねの自然長からののびを表す。なお、時刻 $t = 0$ で $x = x_0$, $dx/dt = 0$ を満たすような解とすること。

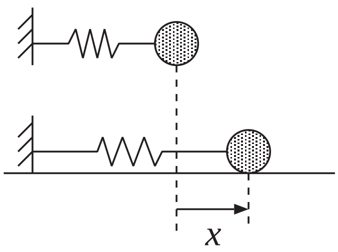

図 1: ばね系

[問題 2 解説]

特性方程式は

$$m\lambda^2 + k = 0$$

である。これを解くと、$\lambda = \pm i\sqrt{\frac{k}{m}}$ という虚数解が現れる。よって、一般解は

$$x = C_1 \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right) + C_2 \sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right)$$

となる。さらに、$t = 0$ で $x = x_0$ を満たすためには、

$$x_0 = C_1 \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}0\right) + C_2 \sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}0\right) = C_1$$

よって、$C_1 = x_0$。また、$t = 0$ で $dx/dt = 0$ も満たさなければならない。

$$\frac{dx}{dt} = -C_1\sqrt{\frac{k}{m}} \sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right) + C_2\sqrt{\frac{k}{m}} \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right)$$

であるから、

$$0 = -C_1\sqrt{\frac{k}{m}} \sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}0\right) + C_2\sqrt{\frac{k}{m}} \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}0\right) = C_2\sqrt{\frac{k}{m}}$$

よって $C_2 = 0$。以上から、解は $\underline{x = x_0 \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right)}$