微分方程式論 演習問題 (4) 変数分離形 (続き 2) (補足編)

担当: 金丸隆志

学籍番号: ＿＿＿＿＿＿＿＿ 氏名: ＿＿＿＿＿＿＿＿

[補足 1] 変数分離形の例題

本日扱うのも今回が 3 回目となる変数分離形である。変数分離形の微分方程式の解法としては初回の内容で全てではあるが、いくつか計算テクニックが必要になる場合があるので、その点を解説する。

ここでは以下の例題を解くことを考えよう。

$$\frac{dx}{dt} = k(x-a)(x-b) \quad (a < x < b) \tag{1}$$

[解法] $a < x < b$ なので、$x \neq a, b$ と考えて良い。$(x-a)(x-b)$ で両辺を割ると、以下のように**変数分離形**になる。

$$\begin{aligned} \frac{1}{(x-a)(x-b)}\frac{dx}{dt} &= k \\ \frac{1}{b-a}\left(\frac{1}{x-b} - \frac{1}{x-a}\right)\frac{dx}{dt} &= k \end{aligned}$$

上の変形では、部分分数への分解に注意。これは次の補足でもう一度触れる。t で積分して

$$\begin{aligned} \frac{1}{b-a}\int\left(\frac{1}{x-b} - \frac{1}{x-a}\right) dx &= \int k\,dt \\ \frac{1}{b-a}\left(\log|x-b| - \log|x-a|\right) &= kt + C \\ \log\left|\frac{x-b}{x-a}\right| &= k(b-a)t + C' \\ (\text{ただし、}C' = (b-a)C) & \\ \left|\frac{x-b}{x-a}\right| &= e^{k(b-a)t+C'} \\ -\frac{x-b}{x-a} &= e^{C'}e^{k(b-a)t} \end{aligned}$$

ここで、絶対値 $|(x-b)/(x-a)|$ を外す際、$a < x < b$ より $|(x-b)/(x-a)| = -(x-b)/(x-a)$ としたことに注意。$e^{C'} = A \ \ (A > 0)$ と置いて、上の式を x について解こう。$x - a$ を両辺にかけて

$$\begin{aligned} -(x-b) &= (x-a)Ae^{k(b-a)t} \\ (1 + Ae^{k(b-a)t})x &= b + aAe^{k(b-a)t} \\ x &= \underline{\frac{b + aAe^{k(b-a)t}}{1 + Ae^{k(b-a)t}} \quad (A > 0)} \end{aligned}$$

分子分母を $Ae^{k(b-a)t}$ で割った以下の形でも良い。

$$x = \underline{\frac{bBe^{-k(b-a)t} + a}{Be^{-k(b-a)t} + 1} \quad (B > 0)}$$

この関数のグラフを考えよう。$k > 0$ の場合、$t \to \infty$ で $Ae^{k(b-a)t}$ は非常に大きな数になるので、分子の b と 分母の 1 は無視できて、

$$\begin{aligned} x &= \frac{b + aAe^{k(b-a)t}}{1 + Ae^{k(b-a)t}} && (2) \\ &\to \frac{aAe^{k(b-a)t}}{Ae^{k(b-a)t}} && (3) \\ &= a \quad (t \to \infty) && (4) \end{aligned}$$

となる。一方、$t \to -\infty$ のとき、$Ae^{k(b-a)t}$ は 0 に収束するので

$$\begin{aligned} x &= \frac{b + aAe^{k(b-a)t}}{1 + Ae^{k(b-a)t}} && (5) \\ &\to b \quad (t \to -\infty) && (6) \end{aligned}$$

もし $k < 0$ なら、$t \to \infty$ で $Ae^{k(b-a)t}$ が 0, $t \to -\infty$ で $Ae^{k(b-a)t}$ が大きな数になるので、結果が逆転する。

$$\begin{aligned} x &\to b \quad (t \to \infty) && (7) \\ x &\to a \quad (t \to -\infty) && (8) \end{aligned}$$

さらに微分などにより詳しく解析すれば、この関数は a と b の間で単調減少 ($k > 0$) または単調増加 ($k < 0$) することがわかる (図 1)。特に、単調増加する方の関数を**ロジスティック関数**や**シグモイド関数**などと呼ぶ。

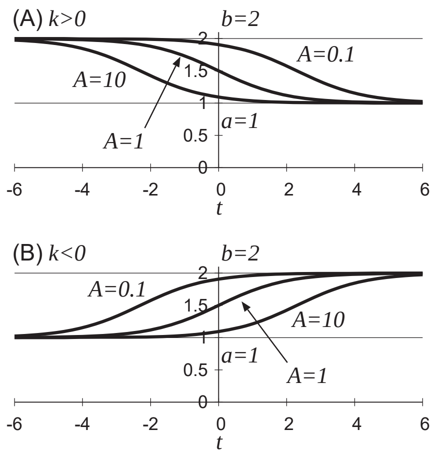

図 1: 解のグラフ。いずれも $a = 1, b = 2$ とした。(A) $k = 1$ の場合、(B) $k = -1$ の場合

[補足 2] 部分分数への分解

例題で部分分数への分解を行った。微分方程式の問題ではしばしば登場するので、その方法を紹介する。

$$\frac{1}{(x-a)(x-b)} = \frac{A}{x-a} + \frac{B}{x-b} \tag{9}$$

の様に分解できると仮定し、A、B を求める方針である。なぜこのような分解が必要かというと、$1/(x-a)(x-b)$ の積分は難しいが、$1/(x-a)$ や $1/(x-b)$ の積分は易しいためである。両辺に $(x-a)(x-b)$ をかけると、

$$1 = A(x-b) + B(x-a) \tag{10}$$

$$(A+B)x - bA - aB - 1 = 0 \tag{11}$$

この式が任意の x について成り立たねばならないため、

$$\begin{cases} A + B = 0 \\ -bA - aB - 1 = 0 \end{cases} \tag{12}$$

が成立しなければならない。これを A、 B に関する連立方程式として解くと、

$$\begin{cases} A = -\dfrac{1}{b-a} \\ B = \dfrac{1}{b-a} \end{cases} \tag{13}$$

が得られる。すなわち、

$$\frac{1}{(x-a)(x-b)} = \frac{1}{b-a}\left(-\frac{1}{x-a} + \frac{1}{x-b}\right) \tag{14}$$

というわけである。