微分方程式 演習問題 (12) ラプラス変換を用いた微分方程式の解法

担当: 金丸隆志

学籍番号: ________________ 氏名: ________________

問題以下の微分方程式をラプラス変換を用いて解け。ただし、指定された初期値を持つとせよ。

1. $\ddot{y} - 2\dot{y} - 3y = e^{2t} \quad (y(0) = 1, \dot{y}(0) = 1)$
2. $\ddot{y} - 3\dot{y} + 2y = e^{t} \quad (y(0) = 0, \dot{y}(0) = 0)$
3. $\ddot{y} - 3\dot{y} + 2y = \sin t \quad (y(0) = 0, \dot{y}(0) = 1)$
4. $\ddot{y} - 2\dot{y} + y = \sin t \quad (y(0) = 0, \dot{y}(0) = 1)$

[**注意**]
これまでの微分方程式は x に関する微分に対して $y' = dy/dx$ という記号を用いていたが、今回学ぶものは t に関する微分であり、区別するため $\dot{y} = dy/dt$ という記号を用いる。もちろん、x が t に変わっただけなので、従来の非斉次方程式の方法で解けるのだが、それをラプラス変換の方法で解けることを学ぶのが今回の目的である。

[**解答**]
1. いま、解を $y = f(t)$ と書き、この $f(t)$ のラプラス変換を $\mathcal{L}[y] = \mathcal{L}[f(t)] = F(s)$ とおく。この式と、公式

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}[\ddot{y}] = \mathcal{L}[\ddot{f}(t)] &= s^2F(s) - sf(0) - \dot{f}(0) \\
\mathcal{L}[\dot{y}] = \mathcal{L}[\dot{f}(t)] &= sF(s) - f(0) \\
\mathcal{L}[e^{at}] &= \frac{1}{s-a}
\end{aligned}$$

を問題の微分方程式に代入すると、

$$\begin{aligned}
&(s^2F(s) - sf(0) - \dot{f}(0)) - 2(sF(s) - f(0)) - 3F(s) \\
&\qquad = \frac{1}{s-2} \\
&(s^2 - 2s - 3)F(s) - sf(0) - \dot{f}(0) + 2f(0) \\
&\qquad = \frac{1}{s-2}
\end{aligned}$$

が得られる。ここで、初期条件 $y(0) = f(0) = 1, \dot{y}(0) = \dot{f}(0) = 1$ を代入すると、

$$\begin{aligned}
(s+1)(s-3)F(s) - s - 1 + 2 &= \frac{1}{s-2} \\
(s+1)(s-3)F(s) &= \frac{1}{s-2} + s - 1 \\
(s+1)(s-3)F(s) &= \frac{s^2 - 3s + 3}{s-2}
\end{aligned}$$

よって

$$F(s) = \frac{s^2 - 3s + 3}{(s+1)(s-3)(s-2)}$$

が得られる。ここで、前回学んだ部分分数への展開を行う。

$$\begin{aligned}
F(s) &= \frac{s^2 - 3s + 3}{(s+1)(s-3)(s-2)} \qquad (1) \\
&= \frac{A}{s+1} + \frac{B}{s-3} + \frac{C}{s-2}
\end{aligned}$$

の形を仮定し、変形を続けると、

$$\begin{aligned}
F(s) &= \frac{A(s-3)(s-2)}{(s+1)(s-3)(s-2)} + \frac{B(s+1)(s-2)}{(s+1)(s-3)(s-2)} \\
&\quad + \frac{C(s+1)(s-3)}{(s+1)(s-3)(s-2)} \\
&= \frac{A(s^2 - 5s + 6)}{(s+1)(s-3)(s-2)} + \frac{B(s^2 - s - 2)}{(s+1)(s-3)(s-2)} \\
&\quad + \frac{C(s^2 - 2s - 3)}{(s+1)(s-3)(s-2)} \\
&= \frac{(A+B+C)s^2 + (-5A - B - 2C)s}{(s+1)(s-3)(s-2)} \\
&\quad + \frac{(6A - 2B - 3C)}{(s+1)(s-3)(s-2)} \qquad (2)
\end{aligned}$$

(1) 式と (2) 式の係数を比べると、以下の連立方程式が成り立つ。

$$\begin{aligned}
A + B + C &= 1 \qquad (3) \\
-5A - B - 2C &= -3 \qquad (4) \\
6A - 2B - 3C &= 3 \qquad (5)
\end{aligned}$$

(3) × 2 + (4) および、(3) × 3 + (5) より、次式が成り立つ。

$$\begin{aligned}
-3A + B &= -1 \\
9A + B &= 6
\end{aligned}$$

これを解いて、$A = \frac{7}{12}$ および $B = \frac{3}{4}$。これを (3) 式に代入して $C = -\frac{1}{3}$。よって、

$$F(s) = \frac{7}{12}\frac{1}{s+1} + \frac{3}{4}\frac{1}{s-3} - \frac{1}{3}\frac{1}{s-2}$$

これをラプラス逆変換して

$$y = f(t) = \underline{\frac{7}{12}e^{-t} + \frac{3}{4}e^{3t} - \frac{1}{3}e^{2t}}$$

2. いま、解を $y = f(t)$ と書き、この $f(t)$ のラプラス変換を $\mathcal{L}[y] = \mathcal{L}[f(t)] = F(s)$ とおく。この式と、公式

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}[\ddot{y}] = \mathcal{L}[\ddot{f}(t)] &= s^2F(s) - sf(0) - \dot{f}(0) \\
\mathcal{L}[\dot{y}] = \mathcal{L}[\dot{f}(t)] &= sF(s) - f(0) \\
\mathcal{L}[e^{at}] &= \frac{1}{s-a}
\end{aligned}$$

を問題の微分方程式に代入すると、

$$\begin{aligned}
&(s^2F(s) - sf(0) - \dot{f}(0)) - 3(sF(s) - f(0)) + 2F(s) \\
&\qquad = \frac{1}{s-1} \\
&(s^2 - 3s + 2)F(s) - sf(0) - \dot{f}(0) - 3f(0) \\
&\qquad = \frac{1}{s-1}
\end{aligned}$$

が得られる。ここで、初期条件 $y(0) = f(0) = 0, \dot{y}(0) = \dot{f}(0) = 0$ を代入すると、

$$\begin{aligned}
(s-2)(s-1)F(s) &= \frac{1}{s-1} \\
F(s) &= \frac{1}{(s-2)(s-1)^2} \qquad (6)
\end{aligned}$$

が得られる。ここで、前回学んだ部分分数への展開を行う。

$$F(s) = \frac{A}{s-2} + \frac{B}{s-1} + \frac{C}{(s-1)^2}$$

の形を仮定する。$1/(s-1)$ の項と $1/(s-1)^2$ の項が必要なことに注意。変形を続けると、

$$\begin{aligned}
F(s) &= \frac{A(s-1)^2}{(s-2)(s-1)^2} + \frac{B(s-2)(s-1)}{(s-2)(s-1)^2} \\
&\quad + \frac{C(s-2)}{(s-2)(s-1)^2} \\
&= \frac{A(s^2-2s+1)}{(s-2)(s-1)^2} + \frac{B(s^2-3s+2)}{(s-2)(s-1)^2} \\
&\quad + \frac{C(s-2)}{(s-2)(s-1)^2} \\
&= \frac{(A+B)s^2 + (-2A-3B+C)s}{(s-2)(s-1)^2} \\
&\quad + \frac{(A+2B-2C)}{(s-2)(s-1)^2} \qquad (7)
\end{aligned}$$

(6) 式と (7) 式の係数を比べると、以下の連立方程式が成り立つ。

$$\begin{aligned}
A + B &= 0 \qquad (8) \\
-2A - 3B + C &= 0 \qquad (9) \\
A + 2B - 2C &= 1 \qquad (10)
\end{aligned}$$

(9) $\times$ 2 + (10) より、

$$-3A - 4B = 1$$

(8) 式と (11) 式よりこれを解いて、$A = 1$ および $B = -1$。これを (9) 式に代入して $C = -1$。よって、

$$F(s) = \frac{1}{s-2} - \frac{1}{s-1} - \frac{1}{(s-1)^2}$$

これをラプラス逆変換して

$$y = f(t) = \underline{e^{2t} - e^t - te^t}$$

ただし、

$$\mathcal{L}[t^n e^{at}] = \frac{n!}{(s-a)^{n+1}}$$

に $n = 1$ を代入した

$$\mathcal{L}[te^{at}] = \frac{1}{(s-a)^2}$$

を用いたことに注意。

3. いま、解を $y = f(t)$ と書き、この $f(t)$ のラプラス変換を $\mathcal{L}[y] = \mathcal{L}[f(t)] = F(s)$ とおく。この式と、公式

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}[\ddot{y}] = \mathcal{L}[\ddot{f}(t)] &= s^2F(s) - sf(0) - \dot{f}(0) \\
\mathcal{L}[\dot{y}] = \mathcal{L}[\dot{f}(t)] &= sF(s) - f(0) \\
\mathcal{L}[\sin \omega t] &= \frac{\omega}{s^2 + \omega^2}
\end{aligned}$$

を問題の微分方程式に代入すると、

$$\begin{aligned}
&(s^2F(s) - sf(0) - \dot{f}(0)) - 3(sF(s) - f(0)) + 2F(s) \\
&\qquad = \frac{1}{s^2+1} \\
&(s^2 - 3s + 2)F(s) - sf(0) - \dot{f}(0) + 3f(0)) \\
&\qquad = \frac{1}{s^2+1}
\end{aligned}$$

が得られる。ここで、初期条件 $y(0) = f(0) = 0, \dot{y}(0) = \dot{f}(0) = 1$ を代入すると、

$$\begin{aligned}
(s-1)(s-2)F(s) - 1 &= \frac{1}{s^2+1} \\
(s-1)(s-2)F(s) &= \frac{1}{s^2+1} + 1 \\
(s-1)(s-2)F(s) &= \frac{s^2+2}{s^2+1} \\
F(s) &= \frac{s^2+2}{(s-1)(s-2)(s^2+1)} \\
&\qquad (11)
\end{aligned}$$

が得られる。ここで、前回学んだ部分分数への展開を行う。

$$F(s) = \frac{A}{s-1} + \frac{B}{s-2} + \frac{Cs+D}{s^2+1}$$

の形を仮定する。$1/(s^2+1)$ の項の分子は $Cs+D$ とすることに注意。変形を続けると、

$$\begin{aligned}F(s) &= \frac{A(s-2)(s^2+1)}{(s-1)(s-2)(s^2+1)}+\frac{B(s-1)(s^2+1)}{(s-1)(s-2)(s^2+1)}\\ &\quad+\frac{(Cs+D)(s-1)(s-2)}{(s-1)(s-2)(s^2+1)}\\ &= \frac{A(s^3-2s^2+s-2)}{(s-1)(s-2)(s^2+1)}+\frac{B(s^3-s^2+s-1)}{(s-1)(s-2)(s^2+1)}\\ &\quad+\frac{Cs^3+(-3C+D)s^2+(2C-3D)s+2D}{(s-1)(s-2)(s^2+1)}\\ &= \frac{(A+B+C)s^3+(-2A-B-3C+D)s^2}{(s-1)(s-2)(s^2+1)}\\ &\quad+\frac{(A+B+2C-3D)s+(-2A-B+2D)}{(s-1)(s-2)(s^2+1)}\end{aligned}$$

(11) 式と (12) 式の係数を比べると、以下の連立方程式が成り立つ。

$$A+B+C = 0 \tag{13}$$
$$-2A-B-3C+D = 1 \tag{14}$$
$$A+B+2C-3D = 0 \tag{15}$$
$$-2A-B+2D = 2 \tag{16}$$

(14) × 3 + (15) および (14) × 2 − (16) より、

$$-5A-2B-7C = 3 \tag{17}$$
$$-2A-B-6C = 0 \tag{18}$$

(11) × 7 + (17) および (11) × 6 + (18) より、

$$2A+5B = 3 \tag{19}$$
$$4A+5B = 0 \tag{20}$$

これらから、$A=-\frac{3}{2}$, $B=\frac{6}{5}$。残りの式に代入して $C=\frac{3}{10}$, $D=\frac{1}{10}$。よって、

$$\begin{aligned}F(s) &= -\frac{3}{2}\frac{1}{s-1}+\frac{6}{5}\frac{1}{s-2}\\ &\quad+\frac{3}{10}\frac{s}{s^2+1}+\frac{1}{10}\frac{1}{s^2+1}\end{aligned}$$

これをラプラス逆変換して

$$y=f(t)=\underline{-\frac{3}{2}e^t+\frac{6}{5}e^{2t}+\frac{3}{10}\cos t+\frac{1}{10}\sin t}$$

ただし、

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[e^{at}\sin\omega t] &= \frac{\omega}{(s-a)^2+\omega^2}\\ \mathcal{L}[e^{at}\cos\omega t] &= \frac{s-a}{(s-a)^2+\omega^2}\end{aligned}$$

に $a=0$ を代入した

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[\sin\omega t] &= \frac{\omega}{s^2+\omega^2}\\ \mathcal{L}[\cos\omega t] &= \frac{s}{s^2+\omega^2}\end{aligned}$$

を用いたことに注意。

4. いま、解を $y=f(t)$ と書き、この $f(t)$ のラプラス変換を $\mathcal{L}[y]=\mathcal{L}[f(t)]=F(s)$ とおく。この式と、公式

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[\ddot{y}]=\mathcal{L}[\ddot{f}(t)] &= s^2F(s)-sf(0)-\dot{f}(0)\\ \mathcal{L}[\dot{y}]=\mathcal{L}[\dot{f}(t)] &= sF(s)-f(0)\\ \mathcal{L}[\sin\omega t] &= \frac{\omega}{s^2+\omega^2}\end{aligned} \tag{12}$$

を問題の微分方程式に代入すると、

$$\begin{aligned}&(s^2F(s)-sf(0)-\dot{f}(0))-2(sF(s)-f(0))+F(s)\\ &\quad=\frac{1}{s^2+1}\\ &(s^2-2s+1)F(s)-sf(0)-\dot{f}(0)-2f(0))\\ &\quad=\frac{1}{s^2+1}\end{aligned}$$

が得られる。ここで、初期条件 $y(0)=f(0)=0, \dot{y}(0)=\dot{f}(0)=1$ を代入すると、

$$\begin{aligned}(s-1)^2F(s)-1 &= \frac{1}{s^2+1}\\ (s-1)^2F(s) &= \frac{1}{s^2+1}+1\\ (s-1)^2F(s) &= \frac{s^2+2}{s^2+1}\\ F(s) &= \frac{s^2+2}{(s-1)^2(s^2+1)}\end{aligned} \tag{21}$$

が得られる。ここで、前回学んだ部分分数への展開を行う。

$$F(s) = \frac{A}{s-1}+\frac{B}{(s-1)^2}+\frac{Cs+D}{s^2+1}$$

の形を仮定する。$1/(s-1)$ と $1/(s-1)^2$ の項が必要なこと、および $1/(s^2+1)$ の項の分子は $Cs+D$ とすることに注意。変形を続けると、

$$\begin{aligned}F(s) &= \frac{A(s-1)(s^2+1)}{(s-1)^2(s^2+1)}+\frac{B(s^2+1)}{(s-1)^2(s^2+1)}\\ &\quad+\frac{(Cs+D)(s-1)^2}{(s-1)^2(s^2+1)}\\ &= \frac{A(s^3-s^2+s-1)}{(s-1)^2(s^2+1)}+\frac{B(s^2+1)}{(s-1)^2(s^2+1)}\\ &\quad+\frac{Cs^3+(-2C+D)s^2+(C-2D)s+D}{(s-1)^2(s^2+1)}\end{aligned}$$

$$= \frac{(A+C)s^3+(-A+B-2C+D)s^2}{(s-1)^2(s^2+1)} + \frac{(A+C-2D)s+(-A+B+D)}{(s-1)^2(s^2+1)} \quad (22)$$

(21) 式と (22) 式の係数を比べると、以下の連立方程式が成り立つ。

$$A+C = 0 \quad (23)$$
$$-A+B-2C+D = 1 \quad (24)$$
$$A+C-2D = 0 \quad (25)$$
$$-A+B+D = 2 \quad (26)$$

解き方はいろいろあるが、(24) − (26) を実行すると簡単に $C=\frac{1}{2}$ が得られる。これを (23) 式に代入して $A=-\frac{1}{2}$。(25) より $D=0$。最後に $B=\frac{3}{2}$。よって、

$$F(s) = -\frac{1}{2}\frac{1}{s-1}+\frac{3}{2}\frac{1}{(s-1)^2}+\frac{1}{2}\frac{s}{s^2+1}$$

これをラプラス逆変換して

$$y=f(t)=\underline{-\frac{1}{2}e^t+\frac{3}{2}te^t+\frac{1}{2}\cos t}$$

[ラプラス変換まとめ]

⟨ 公式を用いずラプラス変換する問題 ⟩
→ 第十回問題

- $F(s)=\int_0^\infty f(t)e^{-st}dt$ を計算

⟨ 公式を用いたラプラス変換 ⟩
→ 第十一回、第十二回問題
以下の三公式を覚えておけば残りを全て導ける。

- $\mathcal{L}[e^{at}\sin\omega t]=\dfrac{\omega}{(s-a)^2+\omega^2}$
- $\mathcal{L}[e^{at}\cos\omega t]=\dfrac{s-a}{(s-a)^2+\omega^2}$
- $\mathcal{L}[t^n e^{at}]=\dfrac{n!}{(s-a)^{n+1}}$

これに $a=0$ を代入すれば、

- $\mathcal{L}[\sin\omega t]=\dfrac{\omega}{s^2+\omega^2}$
- $\mathcal{L}[\cos\omega t]=\dfrac{s}{s^2+\omega^2}$
- $\mathcal{L}[t^n]=\dfrac{n!}{s^{n+1}}$

が導ける。また、(a を含む) 3 番目の公式に $n=0$, $n=1$ を代入すれば

- $\mathcal{L}[e^{at}]=\dfrac{1}{s-a}$
- $\mathcal{L}[te^{at}]=\dfrac{1}{(s-a)^2}$

が得られる ($0!=1$ に注意)。さらにこれらに $a=0$ を代入すれば

- $\mathcal{L}[1]=\dfrac{1}{s}$
- $\mathcal{L}[t]=\dfrac{1}{s^2}$
- $\mathcal{L}[t^2]=\dfrac{2}{s^3}$

が得られる。

⟨ 部分分数への展開 ⟩
→ 第十一回、第十二回問題
以下の点は見落としやすい

- 分母に $(s-a)^2$ があれば、$\dfrac{A}{s-a}$ と $\dfrac{B}{(s-a)^2}$ に分解
- 分母に $s^2+\omega^2$ があれば、$\dfrac{Cs+D}{s^2+\omega^2}$ に分解

⟨ ラプラス変換を用いた微分方程式の解法 ⟩
→ 第十二回問題
上記の注意に加え、以下の二公式を覚える必要がある。
$\mathcal{L}[f(t)]=F(s)$ の時、

- $\mathcal{L}[\ddot{f}(t)]=s^2F(s)-sf(0)-\dot{f}(0)$
- $\mathcal{L}[\dot{f}(t)]=sF(s)-f(0)$