

微分方程式 演習問題 (11) 公式による逆ラプラス変換

担当: 金丸隆志

学籍番号: \_\_\_\_\_ 氏名: \_\_\_\_\_

問題以下の関数を逆ラプラス変換せよ (公式を用いて良い)。

$$1. F(s) = \frac{17s}{(2s-1)(s^2+4)}$$

$$2. F(s) = \frac{2s+5}{s^2+4s+13}$$

$$3. F(s) = \frac{1}{(s-1)^3}$$

$$4. F(s) = \frac{3s^2-5s+4}{(s-1)^3}$$

[解答の前の諸注意]

前回ラプラス変換を行なったが、今回はその逆を行なう。公式を用いて良いのだが、公式を適用できる形に変換するためにいくつか作業が必要である。

- 部分分数へ分解
- 分母の二次式 ( $as^2+bs+c$ ) を標準形 ( $a(s-\alpha)^2+\beta$ ) に変換
- 公式に合う様に定数部を調整

これらを適宜利用して最終的に公式を当てはめる。問題の解説の前に、部分分数への分解についての注意を挙げる。

[部分分数への分解について]

いくつか例を挙げると、以下のようになる。

$$\bullet \frac{n(s)}{(s+a)(s+b)(s+c)} = \frac{A}{s+a} + \frac{B}{s+b} + \frac{C}{s+c}$$

$$\bullet \frac{n(s)}{(s+a)(s+b)^2} = \frac{A}{s+a} + \frac{B}{s+b} + \frac{C}{(s+b)^2}$$

$$\bullet \frac{n(s)}{(s+a)^3} = \frac{A}{s+a} + \frac{B}{(s+a)^2} + \frac{C}{(s+a)^3}$$

$$\bullet \frac{n(s)}{(s^2+a^2)(s+b)} = \frac{As+B}{s^2+a^2} + \frac{C}{s+b}$$

法則があるので適宜判断して利用して欲しい。分母が  $s^2+a^2$  の形式の時は分子は  $s$  の一次式になるので注意。

[公式の暗記について]

ラプラス変換の問題を解く際は、ラプラス変換の公式を覚えていることが必要である。公式を覚えていない場合は、問題を解く毎に公式を導く必要があるが、さすがに時間と労力がかかるため覚えた方がよい。

ただし、全て覚える必要は必ずしもなく、以下の三公式を覚えておけばそこから全て導ける。

$$\bullet \mathcal{L}[e^{at} \sin \omega t] = \frac{\omega}{(s-a)^2 + \omega^2}$$

$$\bullet \mathcal{L}[e^{at} \cos \omega t] = \frac{s-a}{(s-a)^2 + \omega^2}$$

$$\bullet \mathcal{L}[t^n e^{at}] = \frac{n!}{(s-a)^{n+1}}$$

これはラプラス変換の公式であり、ラプラス逆変換の公式は右辺から左辺の [] 内の数式を求める手続きである。

この3つの式を覚えておけば、他の公式は全て導ける。 $a=0$  を代入すれば、

$$\bullet \mathcal{L}[\sin \omega t] = \frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$$

$$\bullet \mathcal{L}[\cos \omega t] = \frac{s}{s^2 + \omega^2}$$

$$\bullet \mathcal{L}[t^n] = \frac{n!}{s^{n+1}}$$

が導ける。また、( $a$  を含む) 3 番目の公式に  $n=0$ ,  $n=1$ ,  $n=2$  を代入すれば

$$\bullet \mathcal{L}[e^{at}] = \frac{1}{s-a}$$

$$\bullet \mathcal{L}[te^{at}] = \frac{1}{(s-a)^2}$$

$$\bullet \mathcal{L}[t^2 e^{at}] = \frac{2}{(s-a)^3}$$

が得られる ( $0! = 1$  に注意)。さらにこれらに  $a=0$  を代入すれば

$$\bullet \mathcal{L}[1] = \frac{1}{s}$$

$$\bullet \mathcal{L}[t] = \frac{1}{s^2}$$

$$\bullet \mathcal{L}[t^2] = \frac{2}{s^3}$$

が得られる。

そのようなわけで、最初の三公式とそこからの諸公式の導き方をしっかり覚えることがラプラス変換の問題を解くための早道である。

[解答]

1. まず、公式を適用できるようにするため、部分分数に分解する。

$$\begin{aligned} \frac{17s}{(2s-1)(s^2+4)} &= \frac{A}{2s-1} + \frac{Bs+C}{s^2+4} \\ &= \frac{A(s^2+4) + (Bs+C)(2s-1)}{(2s-1)(s^2+4)} \\ &= \frac{(A+2B)s^2 + (-B+2C)s + 4A-C}{(2s-1)(s^2+4)} \end{aligned}$$

ここで、両辺の分子を見くらべて、以下の方程式を得る。

$$\begin{aligned} A+2B &= 0 \\ -B+2C &= 17 \\ 4A-C &= 0 \end{aligned}$$

これを解いて、 $A=2, B=-1, C=8$ を得る。よって、

$$F(s) = \frac{2}{2s-1} + \frac{-s+8}{s^2+4}$$

が得られる。これを、公式が利用できるように調整する。具体的には、第一項の分子分母に2をかけて $1/(s-a)$ の形にし、第二項を二つに分解して $s/(s^2+\omega^2)$ や $\omega/(s^2+\omega^2)$ の形に直す。(この判断が素早く出来るようになるためには、ラプラス変換の公式に精通する必要がある)。結局、以下が得られる。

$$F(s) = \frac{1}{s-\frac{1}{2}} - \frac{s}{s^2+2^2} + 4 \cdot \frac{2}{s^2+2^2}$$

公式を適用してラプラス逆変換することで、

$$f(t) = \underline{e^{\frac{1}{2}t} - \cos 2t + 4 \sin 2t}$$

が得られる。

2. 公式を適用できるようにするため、部分分数にしたところであるが、簡単には因数分解できない。分母の $s^2+4s+13$ が因数分解して $(s-\alpha)(s-\beta)$ と出来るとすると、 $\alpha$ と $\beta$ は2次方程式 $s^2+4s+13=0$ の解である。しかし、この2次方程式の判別式は $D=b^2-4ac=16-4\cdot 13=-36<0$ であり、解は実数解を持たず、結局(実数の範囲では)この2次式は因数分解できない。

ではどうすべきかという、[解答の前の諸注意]で触れたように、分母を標準型に直す必要がある。具体的には、

$$s^2+4s+13 = (s+2)^2+9$$

と変形できる。この時点で、 $\omega/((s-a)^2+\omega^2)$ や $(s-a)/((s-a)^2+\omega^2)$ の公式が使えるように気

づいて欲しいところ。これらの公式が使えるように変形を進めると、

$$\begin{aligned} \frac{2s+5}{s^2+4s+13} &= \frac{2s+5}{(s+2)^2+9} \\ &= \frac{2(s+2)+1}{(s+2)^2+9} \\ &= 2 \cdot \frac{s+2}{(s+2)^2+3^2} + \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{(s+2)^2+3^2} \end{aligned}$$

公式を適用してラプラス逆変換することで、

$$f(t) = \underline{2e^{-2t} \cos 3t + \frac{1}{3}e^{-2t} \sin 3t}$$

が得られる。

3. これは公式がほぼそのまま適用できる。

$$F(s) = \frac{1}{2} \cdot \frac{2!}{(s-1)^3}$$

より( $2! = 2 \cdot 1 = 2$ に注意)、

$$f(t) = \underline{\frac{1}{2}t^2 e^t}$$

4. まず、公式を適用できるようにするため、部分分数に分解する。

$$\begin{aligned} \frac{3s^2-5s+4}{(s-1)^3} &= \frac{A}{s-1} + \frac{B}{(s-1)^2} + \frac{C}{(s-1)^3} \\ &= \frac{A(s-1)^2 + B(s-1) + C}{(s-1)^3} \\ &= \frac{As^2 + (-2A+B)s + A-B+C}{(s-1)^3} \end{aligned}$$

ここで、両辺の分子を見くらべて、以下の方程式を得る。

$$\begin{aligned} A &= 3 \\ -2A+B &= -5 \\ A-B+C &= 4 \end{aligned}$$

これを解いて、 $A=3, B=1, C=2$ を得る。よって、

$$F(s) = \frac{3}{s-1} + \frac{1}{(s-1)^2} + \frac{2}{(s-1)^3}$$

これを公式が適用できる形に変形すると、

$$F(s) = 3 \cdot \frac{1}{s-1} + \frac{1}{(s-1)^2} + \frac{2}{(s-1)^3}$$

公式を適用してラプラス逆変換することで、

$$f(t) = \underline{3e^t + te^t + t^2 e^t}$$

が得られる。