微分方程式 演習問題 (8) 基本解の一次独立性

担当: 金丸隆志

学籍番号:＿＿＿＿＿＿＿＿ 氏名:＿＿＿＿＿＿＿＿

問題 1

1. 微分方程式 $y''+5y'+6y=0$ の一般解を求めよ。
2. (1) の一般解は 2 つの基本解 y_1, y_2 の重ね合わせ ($y=C_1y_1+C_2y_2$) と見なすことができる。この時、基本解 y_1, y_2 が一次独立であることを示せ。

問題 2

1. 微分方程式 $y''+8y'+16y=0$ の一般解を求めよ。
2. (1) の一般解は 2 つの基本解 y_1, y_2 の重ね合わせ ($y=C_1y_1+C_2y_2$) と見なすことができる。この時、基本解 y_1, y_2 が一次独立であることを示せ。

問題 3

1. 微分方程式 $y''+6y'+45y=0$ の一般解を求めよ。
2. (1) の一般解は 2 つの基本解 y_1, y_2 の重ね合わせ ($y=C_1y_1+C_2y_2$) と見なすことができる。この時、基本解 y_1, y_2 が一次独立であることを示せ。

[解答]

1.(1) $y=e^{\lambda}$ を問題の微分方程式に代入すると、特性方程式

$$\lambda^2+5\lambda+6=0$$

が得られる (特性方程式については第 6 回参照)。これより、

$$\begin{aligned}(\lambda+3)(\lambda+2) &= 0\\ \lambda &= -3,-2\end{aligned}$$

が得られる、一般解 $\underline{y=C_1e^{-3x}+C_2e^{-2x}}$ が得られる。

(2) ロンスキー行列式 $W(x)=\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}$ が 0 でなければ基本解 y_1, y_2 は一次独立である。

[補足]

なお、行列 $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ に対し、行列式は det A あるいは絶対値記号を用いて $|A|$ と書き、以下で定義される。

$$\det A=|A|=\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}=ad-bc$$

今、$y_1=e^{-3x}$ および $y_2=e^{-2x}$ に対してロンスキー行列式を計算する。$y_1'=-3e^{-3x}$ および $y_2'=-2e^{-2x}$ より、

$$\begin{aligned}W(x) &= \begin{vmatrix} e^{-3x} & e^{-2x} \\ -3e^{-3x} & -2e^{-2x} \end{vmatrix}\\ &= -2e^{-3x}e^{-2x}-(-3)e^{-2x}e^{-3x}\\ &= e^{-5x}\neq 0\end{aligned}$$

よって、基本解 $y_1=e^{-3x}$ と $y_2=e^{-2x}$ は一次独立である。

2.(1) $y=e^{\lambda}$ を問題の微分方程式に代入すると、特性方程式

$$\lambda^2+8\lambda+16=0$$

が得られる (特性方程式については第 6 回参照)。これより、

$$\begin{aligned}(\lambda+4)^2 &= 0\\ \lambda &= -4\end{aligned}$$

が得られる、これより一般解 $\underline{y=C_1e^{-4x}+C_2xe^{-4x}}$ が得られる。

(2) ロンスキー行列式 $W(x)=\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}$ が 0 でなければ基本解 y_1, y_2 は一次独立である。

今、$y_1=e^{-4x}$ および $y_2=xe^{-4x}$ に対してロンスキー行列式を計算する。$y_1'=-4e^{-4x}$ および $y_2'=e^{-4x}-4xe^{-4x}=(1-4x)e^{-4x}$ より、

$$\begin{aligned}W(x) &= \begin{vmatrix} e^{-4x} & xe^{-4x} \\ -4e^{-4x} & (1-4x)e^{-4x} \end{vmatrix}\\ &= (1-4x)e^{-4x}e^{-4x}-(-4)xe^{-4x}e^{-4x}\\ &= e^{-8x}\neq 0\end{aligned}$$

よって、基本解 $y_1=e^{-4x}$ と $y_2=xe^{-4x}$ は一次独立である。

3.(1) $y=e^{\lambda}$ を問題の微分方程式に代入すると、特性方程式

$$\lambda^2+6\lambda+45=0$$

が得られる (特性方程式については第 6 回参照)。これを解くと、$\lambda = -3 \pm 6i$ が得られる、これより一般解 $\underline{y = C_1 e^{-3x}\cos(6x) + C_2 e^{-3x}\sin(6x)}$ が得られる。

(2) ロンスキー行列式 $W(x) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}$ が 0 でなければ基本解 y_1, y_2 は一次独立である。

今、$y_1 = e^{-3x}\cos(6x)$ および $y_2 = e^{-3x}\sin(6x)$ に対し、

$$\begin{aligned} y_1' &= -3e^{-3x}\cos(6x) - 6e^{-3x}\sin(6x) \\ &= -3e^{-3x}(\cos(6x) + 2\sin(6x)) \\ y_2' &= -3e^{-3x}\sin(6x) + 6e^{-3x}\cos(6x) \\ &= -3e^{-3x}(\sin(6x) - 2\cos(6x)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} W(x) &= \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} \\ &= y_1 y_2' - y_2 y_1' \\ &= e^{-3x}\cos(6x)(-3e^{-3x}(\sin(6x) - 2\cos(6x))) \\ &\quad -e^{-3x}\sin(6x)(-3e^{-3x}(\cos(6x) + 2\sin(6x))) \\ &= -3e^{-6x}(\sin(6x)\cos(6x) - 2\cos^2(6x)) \\ &\quad +3e^{-6x}(\sin(6x)\cos(6x) + 2\sin^2(6x)) \\ &= 6e^{-6x}(\sin^2(6x) + \cos^2(6x)) \\ &= 6e^{-6x} \neq 0 \end{aligned}$$

よって、基本解 $y_1 = e^{-3x}\cos(6x)$ と $y_2 = e^{-3x}\sin(6x)$ は一次独立である。