微分方程式 演習問題 (5) 全微分方程式
担当: 金丸隆志

学籍番号: ＿＿＿＿＿＿＿＿ 氏名: ＿＿＿＿＿＿＿＿

問題
以下の全微分方程式の一般解を求めよ。

1. $(x^2 - y)dx + (y^2 - x)dy = 0$
2. $(\cos y + y\cos x)dx + (\sin x - x\sin y)dy = 0$
3. $(2e^{2x}y - 4x)dx + e^{2x}dy = 0$
4. $2xy\, dx + (y^2 - x^2)dy = 0$
$\left(\text{積分因子}\lambda(x,y) = \dfrac{1}{y^2}\right)$

[**解答**]

この全微分方程式の解法は、「y を定数と思って x で積分する」など、**今までの微分方程式の解法とは取り扱いが大きく異なる**。頭を切替えて解くようにして欲しい。

1. $M(x,y) = x^2 - y$ および $N(x,y) = y^2 - x$ に対して、$\dfrac{\partial M(x,y)}{\partial y} = \dfrac{\partial N(x,y)}{\partial x}$ が成立するかを確かめる。

$$\begin{aligned}\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} &= -1\\ \frac{\partial N(x,y)}{\partial x} &= -1\end{aligned}$$

より、$\dfrac{\partial M(x,y)}{\partial y} = \dfrac{\partial N(x,y)}{\partial x}$ が成立しているので、問題の微分方程式は完全微分形である。まず、$M(x,y)$ を y **を定数と思って** x で積分する。

$$\begin{aligned}\int M(x,y)\,dx &= \int (x^2 - y)\,dx\\ &= \frac{1}{3}x^3 - xy + C_1(y) \qquad \text{(i)}\end{aligned}$$

(i) 式の任意定数であるが、y **を定数と思って** x で積分したのであるから、定数 C_1 も y の関数となり得ることに注意する。同様に、$N(x,y)$ を x **を定数と思って** y で積分する。

$$\begin{aligned}\int N(x,y)\,dy &= \int (y^2 - x)\,dy\\ &= \frac{1}{3}y^3 - xy + C_2(x) \qquad \text{(ii)}\end{aligned}$$

(ii) 式の任意定数であるが、x **を定数と思って** y で積分したのであるから、定数 C_2 も x の関数となり得ることに注意する。

さて、**(i), (ii) 式が等しくなるように** $C_1(y)$, $C_2(x)$ **を定めて任意定数** C **と結んだものが答え**となる。(i), (ii) 式を見比べて $C_1(y) = \dfrac{1}{3}y^3$, $C_2(x) = \dfrac{1}{3}x^3$ が分かるから、解は

$$\underline{\frac{1}{3}x^3 - xy + \frac{1}{3}y^3 = C}$$

2. $M(x,y) = \cos y + y\cos x$ および $N(x,y) = \sin x - x\sin y$ に対して、$\dfrac{\partial M(x,y)}{\partial y} = \dfrac{\partial N(x,y)}{\partial x}$ が成立するかを確かめる。

$$\begin{aligned}\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} &= -\sin y + \cos x\\ \frac{\partial N(x,y)}{\partial x} &= \cos x - \sin y\end{aligned}$$

より、$\dfrac{\partial M(x,y)}{\partial y} = \dfrac{\partial N(x,y)}{\partial x}$ が成立しているので、問題の微分方程式は完全微分形である。まず、$M(x,y)$ を y **を定数と思って** x で積分する。

$$\begin{aligned}\int M(x,y)\,dx &= \int (\cos y + y\cos x)\,dx\\ &= x\cos y + y\sin x + C_1(y) \quad \text{(iii)}\end{aligned}$$

(iii) 式の任意定数であるが、y **を定数と思って** x で積分したのであるから、定数 C_1 も y の関数となり得ることに注意する。同様に、$N(x,y)$ を x **を定数と思って** y で積分する。

$$\begin{aligned}\int N(x,y)\,dy &= \int (\sin x - x\sin y)\,dy\\ &= y\sin x + x\cos y + C_2(x) \quad \text{(iv)}\end{aligned}$$

(iv) 式の任意定数であるが、x **を定数と思って** y で積分したのであるから、定数 C_2 も x の関数となり得ることに注意する。

さて、**(iii), (iv) 式が等しくなるように** $C_1(y)$, $C_2(x)$ **を定めて任意定数** C **と結んだものが答え**となる。(iii), (iv) 式を見比べて $C_1(y) = 0$, $C_2(x) = 0$ が分かるから、解は

$$\underline{y\sin x + x\cos y = C}$$

3. $M(x,y) = 2e^{2x}y - 4x$ および $N(x,y) = e^{2x}$ に対して、$\dfrac{\partial M(x,y)}{\partial y} = \dfrac{\partial N(x,y)}{\partial x}$ が成立するかを確かめる。

$$\begin{aligned}\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} &= 2e^{2x}\\ \frac{\partial N(x,y)}{\partial x} &= 2e^{2x}\end{aligned}$$

より、$\dfrac{\partial M(x,y)}{\partial y} = \dfrac{\partial N(x,y)}{\partial x}$ が成立しているので、問題の微分方程式は完全微分形である。まず、$M(x,y)$ を y **を定数と思って** x で積分する。

$$\begin{aligned}\int M(x,y)\,dx &= \int (2e^{2x}y - 4x)\,dx \\ &= e^{2x}y - 2x^2 + C_1(y) \qquad \text{(v)}\end{aligned}$$

(v) 式の任意定数であるが、y **を定数と思って** x で積分したのであるから、定数 C_1 も y の関数となり得ることに注意する。同様に、$N(x,y)$ を x **を定数と思って** y で積分する。

$$\begin{aligned}\int N(x,y)\,dy &= \int e^{2x}\,dy \\ &= e^{2x}y + C_2(x) \qquad \text{(vi)}\end{aligned}$$

(vi) 式の任意定数であるが、x **を定数と思って** y で積分したのであるから、定数 C_2 も x の関数となり得ることに注意する。

さて、**(v), (vi) 式が等しくなるように** $C_1(y), C_2(x)$ **を定めて任意定数** C **と結んだものが答え**となる。(v), (vi) 式を見比べて $C_1(y) = 0,\ C_2(x) = -2x^2$ が分かるから、解は

$$\underline{e^{2x}y - 2x^2 = C}$$

4. $M(x,y) = 2xy$ および $N(x,y) = y^2 - x^2$ に対して、$\dfrac{\partial M(x,y)}{\partial y} = \dfrac{\partial N(x,y)}{\partial x}$ が成立するかを確かめる。

$$\begin{aligned}\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} &= 2x \\ \frac{\partial N(x,y)}{\partial x} &= -2x\end{aligned}$$

より、$\dfrac{\partial M(x,y)}{\partial y} = \dfrac{\partial N(x,y)}{\partial x}$ が**成立していない**ので、問題の微分方程式は**完全微分形ではない**。

しかし、問題文にあるように積分因子を乗ずると実は微分方程式は完全微分形になる。$\lambda(x,y) = \dfrac{1}{y^2}$ を乗ずると問題の微分方程式は

$$2\frac{x}{y}\,dx + \left(1 - \frac{x^2}{y^2}\right)dy = 0 \qquad \text{(vii)}$$

$M(x,y) = 2\dfrac{x}{y}$ および $N(x,y) = 1 - \dfrac{x^2}{y^2}$ と置き直し、改めて $\dfrac{\partial M(x,y)}{\partial y} = \dfrac{\partial N(x,y)}{\partial x}$ が成立するかを確かめる。

$$\begin{aligned}\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} &= -\frac{2x}{y^2} \\ \frac{\partial N(x,y)}{\partial x} &= -\frac{2x}{y^2}\end{aligned}$$

より、$\dfrac{\partial M(x,y)}{\partial y} = \dfrac{\partial N(x,y)}{\partial x}$ が成立しているので、(vii) 式は完全微分形である。

まず、$M(x,y)$ を y **を定数と思って** x で積分する。

$$\begin{aligned}\int M(x,y)\,dx &= \int 2\frac{x}{y}\,dx \\ &= \frac{x^2}{y} + C_1(y) \qquad \text{(viii)}\end{aligned}$$

(viii) 式の任意定数であるが、y **を定数と思って** x で積分したのであるから、定数 C_1 も y の関数となり得ることに注意する。同様に、$N(x,y)$ を x **を定数と思って** y で積分する。

$$\begin{aligned}\int N(x,y)\,dy &= \int \left(1 - \frac{x^2}{y^2}\right)\,dy \\ &= y + \frac{x^2}{y} + C_2(x) \qquad \text{(ix)}\end{aligned}$$

(ix) 式の任意定数であるが、x **を定数と思って** y で積分したのであるから、定数 C_2 も x の関数となり得ることに注意する。

さて、**(viii), (ix) 式が等しくなるように** $C_1(y)$, $C_2(x)$ **を定めて任意定数** C **と結んだものが答え**となる。(viii), (ix) 式を見比べて $C_1(y) = y,\ C_2(x) = 0$ が分かるから、解は

$$\underline{y + \frac{x^2}{y} = C}$$