微分方程式 演習問題 (2) 変数分離形

担当: 金丸隆志

学籍番号: ____________________ 氏名: ____________________

問題

以下の微分方程式を解け。前回の復習も含まれているので注意せよ。

1. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{x+1}$
2. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{2x}{x^2+1}$
3. $\dfrac{dy}{dx} = xy + x + y + 1$
4. $\dfrac{dy}{dx} = y^2 + y$
5. $2x^2 y\dfrac{dy}{dx} + x(1+y^2) = 0$

[**解答**]

1. 前回学んだ**直接積分形**なので、

$$\begin{aligned} y &= \int \frac{1}{x+1}\,dx \\ &= \underline{\log|x+1| + C} \end{aligned}$$

(公式 $\displaystyle\int f(x+a)\,dx = F(x+a)$ を思い出そう)

2. これも前回学んだ**直接積分形**なので、

$$y = \int \frac{2x}{x^2+1}\,dx$$

ここで、$f(x) = x^2+1$ とすると $f'(x) = 2x$ であることに注意すると、公式 $\displaystyle\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \log|f(x)| + C$ が使える。あるいは、$f(x) = \dfrac{1}{x}$, $g(x) = x^2+1$ に対して公式 $\displaystyle\int f(g(x))g'(x)\,dx = F(g(x)) + C$ を使っても良い。いずれにせよ、

$$\underline{y = \log|x^2+1| + C \quad (C\text{ は任意})}$$

なお、$x^2+1>0$ は明らかなので絶対値記号を取って

$$\underline{y = \log(x^2+1) + C \quad (C\text{ は任意})}$$

でも同じである。(こちらの方が望ましい)

3. 因数分解すると、

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= x(y+1) + (y+1) \\ &= (x+1)(y+1) \end{aligned}$$

ここで $y \neq -1$ と仮定して、両辺を $(y+1)$ で割る。

$$\frac{1}{y+1}\frac{dy}{dx} = x+1$$

これは今回学んだ**変数分離形**である。両辺を x で積分して

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{y+1}\,dy &= \int (x+1)\,dx \\ \log|y+1| &= \frac{1}{2}(x+1)^2 + C \\ |y+1| &= e^{\frac{1}{2}(x+1)^2 + C} \\ y+1 &= \pm e^C e^{\frac{1}{2}(x+1)^2} \\ y &= Ae^{\frac{1}{2}(x+1)^2} - 1 \ \ (A \neq 0) \quad (※) \end{aligned}$$

一方、$y=-1$ なる定数関数を考えると、これも問題の微分方程式を満たす。これは (※) において $A=0$ の場合に相当する。よって

$$\underline{y = Ae^{\frac{1}{2}(x+1)^2} - 1 \quad (A\text{ は任意})}$$

4. $y \neq 0, -1$ と仮定して両辺を $y^2 + y = y(y+1)$ で割ると、以下のように**変数分離形**になる。

$$\begin{aligned} \frac{1}{y(y+1)}\frac{dy}{dx} &= 1 \\ \left(\frac{1}{y} - \frac{1}{y+1}\right)\frac{dy}{dx} &= 1 \end{aligned}$$

上の変形では、部分分数への分解に注意。x で積分して

$$\begin{aligned} \int \left(\frac{1}{y} - \frac{1}{y+1}\right)\,dy &= \int 1\,dx \\ \log|y| - \log|y+1| &= x + C \\ \log\left|\frac{y}{y+1}\right| &= x + C \\ \left|\frac{y}{y+1}\right| &= e^{x+C} \\ \frac{y}{y+1} &= \pm e^C e^x \end{aligned}$$

$\pm e^C = A \ \ (A \neq 0)$ と置いて、上の式を y について解くと

$$y = \frac{Ae^x}{1-Ae^x} \quad (A \neq 0) \quad (※)$$

一方、$y=0$ という定数関数は問題の微分方程式を満たすが、これは (※) 式において $A=0$ の場合に相当

する。さらに、$y=-1$ という定数関数も問題の微分方程式を満たす。まとめると

$$\underline{y=\frac{Ae^x}{1-Ae^x} \quad (A\text{ は任意})\ \text{ または }\ y=-1}$$

あるいは、以下の形でも構わない。

$$\underline{y=\frac{1}{Be^{-x}-1} \quad (B\text{ は任意})\ \text{ または }\ y=0}$$

どちらでも同じである。
5. $x(1+y^2)$ を右辺に移項し、両辺を $x^2(1+y^2)$ で割ると以下のように**変数分離形**になる。

$$\frac{2y}{y^2+1}\frac{dy}{dx} \quad = \quad -\frac{1}{x}$$

両辺を x で積分すると、

$$\int \frac{2y}{y^2+1}\,dy \quad = \quad -\int \frac{1}{x}\,dx$$

ここで、左辺の積分は今回の 2. と変数以外全く同じであることに注意しよう。すなわち、公式 $\displaystyle\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \log|f(x)|+C$ が使える。

$$\begin{aligned}
\log|y^2+1| &= -\log|x|+C \\
\log|y^2+1|+\log|x| &= C \\
\log\left|x(y^2+1)\right| &= C \\
\left|x(y^2+1)\right| &= e^C \\
x(y^2+1) &= \pm e^C \\
x(y^2+1) &= A\ \ (A\neq 0) \\
y^2+1 &= \frac{A}{x}\ \ (A\neq 0) \\
y^2 &= \frac{A}{x}-1\ \ (A\neq 0)
\end{aligned}$$

よって

$$\underline{y^2=\frac{A}{x}-1\ \ (A\neq 0)}$$