ベクトル解析演習 演習問題 (8) 線積分と面積分 (解答編)

担当: 金丸隆志

学籍番号: ＿＿＿＿＿＿＿＿ 氏名: ＿＿＿＿＿＿＿＿

[問題 1] スカラー場の線積分 (1)

t をパラメータとした曲線 $\boldsymbol{r}(t) = \begin{pmatrix} t \\ t^2 \\ 0 \end{pmatrix}$ (ただし $0 \le t \le 1$) を考える。これが xy 平面上の放物線の一部であることはわかるであろう。この曲線に沿ったスカラー場 $\phi(x, y, z) = x$ の線積分を求めよ。

[問題 1 解説]

$\dfrac{d\boldsymbol{r}(t)}{dt} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2t \\ 0 \end{pmatrix}$ であるから、

$$\left|\frac{d\boldsymbol{r}(t)}{dt}\right| = \sqrt{1+4t^2} \tag{1}$$

さらに、$\phi(x(t), y(t), z(t)) = x(t) = t$ であるから、

$$\begin{aligned}
\int \phi(x,y,z)ds &= \int_0^1 t\sqrt{1+4t^2}dt && (2)\\
&= \frac{1}{8}\int_0^1 8t\sqrt{1+4t^2}dt && (3)\\
&= \frac{1}{8}\frac{2}{3}\left[(1+4t^2)^{\frac{3}{2}}\right]_0^1 && (4)\\
&= \underline{\frac{1}{12}(5\sqrt{5}-1)} && (5)
\end{aligned}$$

[問題 2] スカラー場の線積分 (2)

t をパラメータとした曲線 $\boldsymbol{r}(t) = \begin{pmatrix} a\cos t \\ a\sin t \\ bt \end{pmatrix}$ (ただし $0 \le t \le 1$) を考える。ただし、a, b は正の定数とする。これは数学演習 IV (1) で取り扱った螺旋である。この曲線に沿ったスカラー場 $\phi(x, y, z) = z$ の線積分を求めよ。

[問題 2 解説]

$\dfrac{d\boldsymbol{r}(t)}{dt} = \begin{pmatrix} -a\sin t \\ a\cos t \\ b \end{pmatrix}$ であるから、

$$\left|\frac{d\boldsymbol{r}(t)}{dt}\right| = \sqrt{a^2(\sin^2 t + \cos^2 t) + b^2} = \sqrt{a^2+b^2} \tag{6}$$

さらに、$\phi(x(t), y(t), z(t)) = z(t) = bt$ であるから、

$$\begin{aligned}
\int \phi(x,y,z)ds &= \int_0^1 bt\sqrt{a^2+b^2}dt && (7)\\
&= b\sqrt{a^2+b^2}\frac{1}{2}\left[t^2\right]_0^1 && (8)\\
&= \underline{\frac{1}{2}b\sqrt{a^2+b^2}} && (9)
\end{aligned}$$

[問題 3] ベクトル場の線積分

t をパラメータとした曲線 $\boldsymbol{r}(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \\ t \end{pmatrix}$ (ただし $0 \le t \le 1$) を考える。この曲線に沿ったベクトル場 $\boldsymbol{A}(x, y, z) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ \sin^2 \pi z \end{pmatrix}$ の線積分を求めよ。

[問題 3 解説]

$\boldsymbol{A}(x(t), y(t), z(t)) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \\ \sin^2 \pi t \end{pmatrix}$ であり、さらに $\dfrac{d\boldsymbol{r}(t)}{dt} = \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \\ 1 \end{pmatrix}$ であるから、

$$\begin{aligned}
\int \boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{r} &= \int_a^b \boldsymbol{A}\cdot\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}\,dt && (10)\\
&= \int_0^1 (-\cos t\sin t + \sin t\cos t + \sin^2 \pi t)dt && (11)\\
&= \int_0^1 \sin^2 \pi t dt && (12)\\
&= \int_0^1 \frac{1-\cos 2\pi t}{2}dt && (13)\\
&= \left[\frac{1}{2}t - \frac{1}{2}\frac{1}{2\pi}\sin 2\pi t\right]_0^1 && (14)\\
&= \underline{\frac{1}{2}} && (15)
\end{aligned}$$