

ベクトル解析演習 演習問題 (7) ∇ 、grad、div、rot、 Δ (問題編)

担当: 金丸隆志

学籍番号: _____ 氏名: _____

[問題 1] ∇ に関する計算問題

ベクトル場 $\mathbf{A}(x, y, z) = \begin{pmatrix} x^2y^3 \\ 2xy^2z^4 \\ -y^3z^5 \end{pmatrix}$ に対して、

grad (div \mathbf{A}) を計算せよ。すなわち、 $\nabla(\nabla \cdot \mathbf{A})$ のことである。

[問題 3] 調和関数

スカラー場 $\phi(x, y, z) = \frac{1}{r} = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$ に対して以下の問に答えよ。

(a) $\frac{\partial \phi}{\partial x}$ を計算せよ。

(b) $\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}$ を計算せよ。

(c) $\Delta \phi = 0$ であることを示せ。一般に、 $\Delta \phi = 0$ を満たすスカラー場 ϕ のことを調和関数 という。

[問題 2] ∇ の性質

(a) ベクトル場 $\mathbf{A}(x, y, z) = \begin{pmatrix} xyz \\ -y^2z^3 \\ 2x^2y \end{pmatrix}$ に対して、

div (rot \mathbf{A}) を計算せよ。すなわち、 $\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{A})$ のことである。

(b) スカラー場 $\phi(x, y, z) = x^2 + \cos(y - z)$ に対して、rot (grad ϕ) を計算せよ。すなわち、 $\nabla \times (\nabla \phi)$ のことである。