

ベクトル解析演習 演習問題 (5) スカラー場とベクトル場、 ∇ 、grad (問題編)

担当: 金丸隆志

学籍番号:

氏名:

[問題 1] 勾配 (グラディエント)

(a) スカラー場 $\phi(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ に対して、勾配 grad ϕ を計算せよ。

(b) スカラー場 $\phi(x, y, z) = x \log y - x^2 z^3$ に対して、勾配 grad ϕ を計算せよ。

[問題 2] ポテンシャルと勾配 (グラディエント)

(a) [補足 3] にて紹介した万有引力のポテンシャルと力の関係を 3 次元で導こう。今、質量 M の物体が座標原点に存在し、質量 m の物体の位置は $\mathbf{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

であるとしよう。ポテンシャル $U = -GMm/r$ において、 r は 2 物体間の距離であるから、 $r \equiv |\mathbf{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ と書くことができる。すなわち、 (x, y, z) におけるポテンシャルはスカラー場

$$\phi(x, y, z) = -\frac{GMm}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \quad (1)$$

で表すことができる。(1) 式に対して補足編の (3) 式を適用して、物体に働く力のベクトル場 \mathbf{F} を x 、 y 、 z を用いて表せ。

(b) (a) で得た解に対し、 $r \equiv |\mathbf{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ お

よび $\mathbf{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ を用いて \mathbf{F} を表せ (x 、 y 、 z を用いずに、ということ)。

その際、 \mathbf{r}/r をひとまとめにすると、補足編の (2) 式との対応が分かりやすいはずである。注意して考えると、 \mathbf{r}/r は「 \mathbf{r} の方向を向き、長さが 1 であるベクトル」であることがわかる。