

資料 定数係数1階線形微分方程式

担当: 金丸隆志

1 基本的な形

最も簡単な以下の定数係数1階線形微分方程式を考えよう。

$$\frac{dx}{dt} = ax \quad (a \text{ は } 0 \text{ でない定数}) \quad (1)$$

この問題は電気回路上の電荷量など、あらゆる場面で登場する基本的なものである。

これは変数分離という手法を用いて解くことができるのだった。ここで、変数分離のために両辺を x で割りたいのだが、そのために x が 0 かどうかで場合分けする必要がある。まず $x \neq 0$ と仮定して、両辺を x で割る。

$$\frac{1}{x} \frac{dx}{dt} = a$$

t で積分して

$$\int \frac{1}{x} \frac{dx}{dt} dt = \int a dt$$

ここで、以下の性質を用いると

$$\frac{dx}{dt} dt = dx$$

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{x} dx &= \int a dt \\ \log|x| &= at + C \quad (C \text{ は任意の積分定数}) \\ |x| &= e^{at+C} \\ x &= \pm e^{at+C} \\ x &= \pm e^C e^{at} \\ x &= Ae^{at} \quad (A \neq 0) \quad (\ast) \end{aligned}$$

ここで、 $\pm e^C = A$ (ただし $A \neq 0$) という任意定数 A を定義した。 A が 0 を取り得ないのは、 $\pm e^C$ という指数関数の性質からわかる (図 1)。

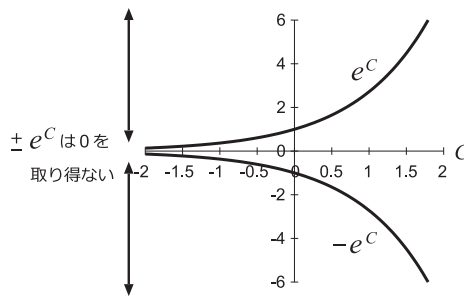


図 1: $\pm e^C$ (C は任意定数) は 0 を取り得ない

一方、 $x = 0$ なる定数関数を考えると、これも問題の微分方程式 (1) を満たす (両辺ともに 0 となるから)。そして、これは (\ast) において $A = 0$ の場合に相当する。よって $A \neq 0$ と $A = 0$ をまとめて

$$\underline{x = Ae^{at}} \quad (A \text{ は任意}) \quad (2)$$

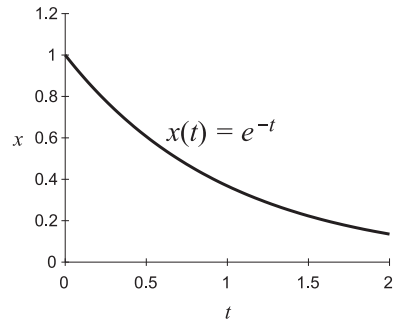


図 2: $x(t) = e^{-t}$ は $t \rightarrow \infty$ で 0 に収束する

この $x = Ae^{at}$ の形の関数は物理や工学では $a < 0$ の場合で頻繁に登場する。図 2 は $x(t) = e^{-t}$ のグラフである。例えばコンデンサに蓄えられた電荷が放電して減衰して行く様子などにこの波形が見られる。一方、 $a > 0$ の場合は $x(t) = e^{at}$ は $t \rightarrow \infty$ で無限に発散する関数であるので、工学で望ましくない解を表す (図 3)。例えば、ばねが振れすぎて壊れてしまうとか、大電流が流れてしまう、などといった状態である。

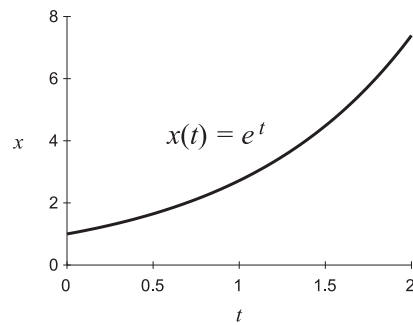


図 3: $x(t) = e^t$ は $t \rightarrow \infty$ で発散する。発散解が出て来たら、工学では要注意。

2 定数項がある場合

定数項がある以下の形も工学ではしばしば登場する。

$$\frac{dx}{dt} = ax + K \quad (a \text{ は } 0 \text{ でない定数}) \quad (3)$$

$K = 0$ の場合 ((1) 式の問題) を理解していれば、解法は簡単である。まず、以下の形に変形する。

$$\frac{dx}{dt} = a(x + K/a)$$

ここで、 $X = x + K/a$ と置く。この両辺を微分すると $X' = x'$ であることがわかるので、問題の微分方程式は

$$\frac{dX}{dt} = aX$$

と書き直すことができる。この解は

$$X = Ae^{at} \quad (A \text{ は任意定数})$$

と書けることは既に学んだ。これを x の形に戻すと、

$$X = -\frac{K}{a} + Ae^{at} \quad (A \text{ は任意定数}) \quad (4)$$

という解が得られる。

工学的に意味があるのは $a < 0$ の場合、つまり収束する場合である。 $K = 0$ の場合は 0 に収束したわけだが (図 2)、この場合 $t \rightarrow \infty$ で $-K/a$ に収束することがポイントである。

$a = -1, A = -1, K = 1$ に対するグラフが図 4 である。0 から出発して非 0 という値に収束するという典型的な例である。

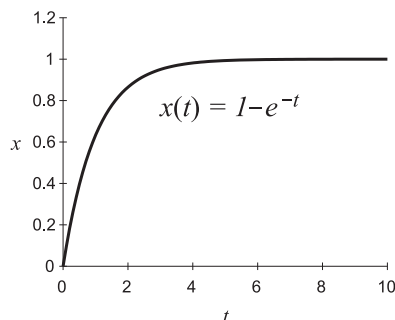


図 4: $x(t) = 1 - e^{-t}$ 。 $a = -1, A = -1, K = 1$ の場合と思えば良い。図 2 は 0 に収束したが、この場合は 1 に収束していることがポイント。

3 振動項がある場合

振動項がある場合は、回路で言えば交流電源に接続した場合になる。

$$\frac{dx}{dt} = ax + K \sin \nu t \quad (a \text{ は } 0 \text{ でない定数}) \quad (5)$$

こちらは非斉次方程式になるので、解は (斉次方程式の一般解)+(特殊解) の形になる。特殊解を三角関数の形で仮定して求めると、最終的な解は下記のようなになる。

$$x(t) = Ae^{at} - K \left(\frac{\nu}{a^2 + \nu^2} \cos \nu t + \frac{a}{a^2 + \nu^2} \sin \nu t \right)$$

(A は任意)