

線形代数学 演習問題 (10) 非同次連立方程式

担当: 金丸隆志

学籍番号: _____

氏名: _____

問題 1

以下の非同次連立方程式を行列の基本変形の方法を用いて求めよ。

$$(1) \begin{cases} x + 2y + 4z = 3 \\ 3x + 9y + 15z = 11 \\ 5x + 7y + 17z = 13 \end{cases} \quad (2) \begin{cases} 2x + y + 3z = 0 \\ 4x + 5y + 4z = -2 \\ 3x + y + 5z = 1 \end{cases} \quad (3) \begin{cases} x + 3y + z - 8u = 3 \\ 3x + 8y + 2z - 21u = 0 \\ -2x - 5y - z + 13u = -4 \end{cases}$$

問題 2

以下の連立方程式が解を持つような a の値を求め、方程式の解を求めよ。

$$\begin{cases} x - y - 2z = 0 \\ y + z = 2 \\ 2x + 3y + z = a \end{cases}$$

[解答]

問題 1(1)

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 3 \\ 3 & 9 & 15 & 11 \\ 5 & 7 & 17 & 13 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{(2 \text{ 行目}) - (1 \text{ 行目}) \times 3 \\ (3 \text{ 行目}) - (1 \text{ 行目}) \times 5}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 3 \\ 0 & 3 & 3 & 2 \\ 0 & -3 & -3 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{(2 \text{ 行目})/3} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 2/3 \\ 0 & -3 & -3 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\substack{(1 \text{ 行目}) - (2 \text{ 行目}) \times 2 \\ (3 \text{ 行目}) + (2 \text{ 行目}) \times 3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 5/3 \\ 0 & 1 & 1 & 2/3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

これより、 $x + 2z = 5/3$ 、 $y + z = 2/3$ が得られる。 $z = t_1$ (t_1 は任意定数) と置くと $x = -2t_1 + 5/3$ 、 $y = -t_1 + 2/3$ と書けるから、

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2t_1 + 5/3 \\ -t_1 + 2/3 \\ t_1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + t_1 \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(補足) 以上のように連立方程式の解が求められたが、この解は他にも様々な表わし方がある。例えば、第二項を以下のように 2 つに分解すれば、

$$\frac{1}{3} \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + (t_1 - 1) \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + t'_1 \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ などとも書ける } (t'_1 = t_1 - 1 \text{ と置いた}).$$

解の表わし方が複数通りあることは以下のように理解できる。今、解は $\mathbf{x} = \mathbf{p}_0 + t_1 \mathbf{n}$ (t_1 は任意定数) の形をしていることに注意しよう。この形で表わされる \mathbf{x} は図 1(a) に示す様に、点 \mathbf{p}_0 を通りベクトル \mathbf{n} 方向の

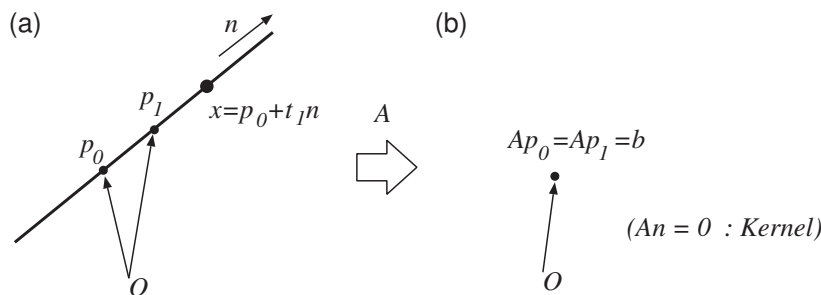


図 1: (a) 変換前のベクトル \mathbf{x} 。(b) 行列 A により変換を受けたベクトル。

直線を表わす。この意味をふまえれば、点 \mathbf{p}_0 は直線上の一点であればどの点でも良いことになる。つまり、図

1(a) で言えば解を $x = p_1 + t_1 n$ で表わしても全く同じ直線を表わすことになる。以上から解の表わし方が一通りでないことがわかる。

なお、この解に行列 A を施すと図 1(b) のように一点 b に変換される (もちろん、そのような x を問題で求めたのであった)。このとき、元の直線方向ベクトル n は、 $t_1 n$ が A の kernel であることより、 $An = 0$ で消えたというわけである。

言い換えると、解 $x = p_0 + t_1 n$ の p_0 は非同次方程式 $Ax = b$ を満たす解の一つ (特別解) であり、 $t_1 n$ は同次方程式 $Ax = 0$ の解 (一般解)、あるいは kernel である。このような「(特別解)+(同次方程式の一般解)」という解の形は数学 III の微分方程式でも登場した構造であることを覚えているだろうか？

(2)

通常通り解いて行けば良いが、分数計算を極力減らすためのテクニックを参考にしてみたい。

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 0 \\ 4 & 5 & 4 & -2 \\ 3 & 1 & 5 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{(2 \text{ 行目}) - (1 \text{ 行目}) \times 2} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & -2 & -2 \\ 3 & 1 & 5 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{(3 \text{ 行目}) \times 2} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & -2 & -2 \\ 6 & 2 & 10 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{(3 \text{ 行目}) - (1 \text{ 行目}) \times 3} \\ & \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & -2 & -2 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{(2 \text{ 行目}) \text{ と } (3 \text{ 行目}) \text{ 入れ換え}} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & -2 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{(2 \text{ 行目}) \times (-1)} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 3 & -2 & -2 \end{pmatrix} \\ & \xrightarrow{\substack{(1 \text{ 行目}) - (2 \text{ 行目}) \\ (3 \text{ 行目}) - (2 \text{ 行目}) \times 3}} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{(1 \text{ 行目}) - (3 \text{ 行目}) \times 4 \\ (2 \text{ 行目}) + (3 \text{ 行目})}} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & -14 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{(1 \text{ 行目})/2} \\ & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -7 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

これより、 $x = -7$ 、 $y = 2$ 、 $z = 4$ が得られる。これまであまり登場しなかったが、このように解が一意に定まる場合ももちろん行の基本変形の方法で解ける。

(3)

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & -8 & 3 \\ 3 & 8 & 2 & -21 & 0 \\ -2 & -5 & -1 & 13 & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{(2 \text{ 行目}) - (1 \text{ 行目}) \times 3 \\ (3 \text{ 行目}) + (1 \text{ 行目}) \times 2}} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & -8 & 3 \\ 0 & -1 & -1 & 3 & -9 \\ 0 & 1 & 1 & -3 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{(3 \text{ 行目}) + (2 \text{ 行目})} \\ & \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & -8 & 3 \\ 0 & -1 & -1 & 3 & -9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -7 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

ここで、第三行目は $0 = -7$ という等式を表わすが、もちろんこの等式は成立しない。よって 解は存在しない。

問題 2

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & a \end{pmatrix} \xrightarrow{(3 \text{ 行目}) - (1 \text{ 行目}) \times 2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 5 & 5 & a \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{(3 \text{ 行目}) - (2 \text{ 行目}) \times 5 \\ (1 \text{ 行目}) + (2 \text{ 行目})}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & a - 10 \end{pmatrix}$$

これより、以下の 3 式が成り立つ。

$$\begin{cases} x - z = 2 \\ y + z = 2 \\ 0 = a - 10 \end{cases}$$

第三式より $a = 10$ 。また、 $z = t_1$ (t_1 は任意の数) と置くと、第一、二式より $x = t_1 + 2$ 、 $y = -t_1 + 2$ が得られる。これをまとめると、

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t_1 + 2 \\ -t_1 + 2 \\ t_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + t_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$