線形代数学 演習問題 (5) 一次独立と一次従属

担当: 金丸隆志

学籍番号: ____________ 氏名: ____________

問題 1

$\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$ を 3 つのベクトル $\boldsymbol{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$、$\boldsymbol{a}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$、$\boldsymbol{a}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ の一次結合で表わせ。

[解答]

$c_1\boldsymbol{a}_1 + c_2\boldsymbol{a}_2 + c_3\boldsymbol{a}_3 = \boldsymbol{v}$ を成分で表わすと、

$$\begin{aligned} c_1 + c_2 + c_3 &= 1 & \text{(i)} \\ -c_2 + c_3 &= -2 & \text{(ii)} \\ c_1 + c_3 &= 2 & \text{(iii)} \end{aligned}$$

(i) + (ii) より

$$c_1 + 2c_3 = -1 \qquad \text{(iv)}$$

(iv) − (iii) より $c_3 = -3$。これを他の方程式に代入して $c_1 = 5, c_2 = -1$。よって、$\underline{v = 5\boldsymbol{a}_1 - \boldsymbol{a}_2 - 3\boldsymbol{a}_3}$。

問題 2

問題 1 のベクトル $\boldsymbol{a}_1$、$\boldsymbol{a}_2$、$\boldsymbol{a}_3$ は一次独立か一次従属かを調べよ。

[解答]

$c_1\boldsymbol{a}_1 + c_2\boldsymbol{a}_2 + c_3\boldsymbol{a}_3 = \boldsymbol{0}$ を満たす数の組 c_1, c_2, c_3 が全て 0 になるかどうかを調べる。$c_1\boldsymbol{a}_1 + c_2\boldsymbol{a}_2 + c_3\boldsymbol{a}_3 = \boldsymbol{0}$ を成分で表わすと、

$$\begin{aligned} c_1 + c_2 + c_3 &= 0 & \text{(v)} \\ -c_2 + c_3 &= 0 & \text{(vi)} \\ c_1 + c_3 &= 0 & \text{(vii)} \end{aligned}$$

(v) + (vi) より

$$c_1 + 2c_3 = 0 \qquad \text{(viii)}$$

(viii) − (vii) より $c_3 = 0$。これを他の方程式に代入して $c_1 = 0, c_2 = 0$。すなわち、$c_1\boldsymbol{a}_1 + c_2\boldsymbol{a}_2 + c_3\boldsymbol{a}_3 = \boldsymbol{0}$ が満たされるのは $c_1 = c_2 = c_3 = 0$ のときのみである。よって、$\underline{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3 \text{ は一次独立}}$。

問題 3

3 つのベクトル $\boldsymbol{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$、$\boldsymbol{a}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$、$\boldsymbol{a}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ x \end{pmatrix}$ が一次従属になるように x を定めよ。

[解答]

$c_1\boldsymbol{a}_1 + c_2\boldsymbol{a}_2 + c_3\boldsymbol{a}_3 = \boldsymbol{0}$ を満たし、なおかつ $c_1 = c_2 = c_3 = 0$ **ではない**数の組 c_1, c_2, c_3 が存在すれば良い。$c_1\boldsymbol{a}_1 + c_2\boldsymbol{a}_2 + c_3\boldsymbol{a}_3 = \boldsymbol{0}$ を成分で表わすと、

$$\begin{aligned} c_1 - c_2 + 2c_3 &= 0 & \text{(ix)} \\ -c_1 + 2c_2 + 2c_3 &= 0 & \text{(x)} \\ 3c_2 + xc_3 &= 0 & \text{(xi)} \end{aligned}$$

(ix) + (x) より

$$c_2 + 4c_3 = 0 \qquad \text{(xii)}$$

(xi) − 3×(xii) より

$$(x - 12)c_3 = 0 \qquad \text{(xiii)}$$

(xiii) 式より $x = 12$ または $c_3 = 0$ が導かれるが、もし $x \neq 12$ とすると $c_3 = 0$ となり、(xii)、(ix) 式などから $c_1 = c_2 = c_3 = 0$ が導かれ、$\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3$ は一次独立となってしまい、題意に反する。よって、$\underline{x = 12}$。