フーリエ変換演習 演習問題 (5) 複素フーリエ級数展開を学ぶための準備２ (解答編)

担当: 金丸隆志

学籍番号: 氏名:

[問題 1] 複素数の極形式

以下の複素数 $z = x + iy$ を極形式 $z = re^{i\theta}$ に変換せよ。なお、r と θ は実数である。

(a) $1 + i$ (b) $-1 + i$

(c) $1 - \sqrt{3}i$ (d) $3 + 4i$

[問題 1 解答]

まず、$r = \sqrt{x^2 + y^2}$ より絶対値 r を求めてから θ を決めてゆく。

(a) $r = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$ より、$\sqrt{2}$ をくくり出すと

$$z = \sqrt{2} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} i \right)$$

これより、$\cos\theta = 1/\sqrt{2}$ および $\sin\theta = 1/\sqrt{2}$。これを満たす θ は $\theta = \pi/4$ であるから、

$$\underline{z = \sqrt{2}\, e^{i\frac{\pi}{4}}}$$

(b) $r = \sqrt{(-1)^2 + 1^2} = \sqrt{2}$ より、$\sqrt{2}$ をくくり出すと

$$z = \sqrt{2} \cdot \left(-\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} i \right)$$

これより、$\cos\theta = -1/\sqrt{2}$ および $\sin\theta = 1/\sqrt{2}$。これを満たす θ は $\theta = 3\pi/4$ であるから、

$$\underline{z = \sqrt{2}\, e^{i\frac{3}{4}\pi}}$$

(c) $r = \sqrt{1^2 + (-\sqrt{3})^2} = \sqrt{4} = 2$ より、2 をくくり出すと

$$z = 2 \cdot \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} i \right)$$

これより、$\cos\theta = 1/2$ および $\sin\theta = -\sqrt{3}/2$。これを満たす θ は $\theta = -\pi/3$ であるから、

$$\underline{z = 2\, e^{-i\frac{\pi}{3}}}$$

(もちろん $\theta = 5\pi/3$ として $z = 2\, e^{i\frac{5}{3}\pi}$ でも良い)

(d) $r = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5$ より、5 をくくり出すと

$$z = 5 \cdot \left(\frac{3}{5} + \frac{4}{5} i \right)$$

これより、$\cos\theta = 3/5$ および $\sin\theta = 4/5$。これを満たす θ は明示的には書けないので、$\theta = \alpha$ とおくと、

$$\underline{z = 5\, e^{i\alpha}\text{、ただし} \cos\alpha = 3/5, \sin\alpha = 4/5}$$

[問題 2] 分母にある虚数単位の処理

以下の複素数を、$z = x + iy$ の形に変形せよ。

(a) $\dfrac{2}{1-i}$ (b) $\dfrac{1}{i}$

[問題 2 解答]

(a) 分母が $a + ib$ であった場合、分子分母の両方に $a - ib$ を掛ければ良い。なぜそれができるかというと、**分子分母に同じ数を掛けるということは全体に 1 を掛けるのと同じ**ことだからである。なお、複素数 $a - ib$ を複素数 $a + ib$ の**複素共役**というのだった (演習問題 (4) **[問題 3]** 参照)。

$$\begin{aligned}
\frac{2}{1-i} &= \frac{2}{1-i} \cdot \frac{1+i}{1+i} = \frac{2(1+i)}{(1-i)(1+i)} \\
&= \frac{2+2i}{1^2 - i^2} = \frac{2+2i}{1-(-1)} = \frac{2+2i}{2} \\
&= \underline{1+i}
\end{aligned}$$

(b) 同様に計算できる。

$$\frac{1}{i} = \frac{1}{i} \cdot \frac{-i}{-i} = \frac{-i}{-i^2} = \underline{-i}$$

[問題 3] 複素数 $e^{i\theta}$ の微分・積分

指数関数の微分・積分の公式

$$\frac{d}{dt} e^{at} = a e^{at}, \qquad \int e^{at} dt = \frac{1}{a} e^{at} + C$$

は指数関数の肩に虚数単位 i が含まれていても成り立つ。すなわち、

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} e^{iat} &= i\, a e^{iat} \\
\int e^{iat} dt &= \frac{1}{ia} e^{iat} + C = -\frac{i}{a} e^{iat} + C
\end{aligned}$$

などの計算ができる。なお、最後の変形では **[問題 2]** で取り扱ったように分子分母に虚数単位 i (または $-i$) をかけていることに注意しよう。これをもとに、以下の微分および定積分を計算せよ。なお、(b) では演習問題 (4) **[問題 5]** の結果も用いるので復習すること。また、e^0 の値にも注意すること。

(a) $\dfrac{d}{dt} e^{i\frac{2\pi n t}{T}}$

(b) $\displaystyle\int_0^T e^{i\frac{2\pi n t}{T}} dt$

[問題 3 解答]

(a)

$$\frac{d}{dt}e^{i\frac{2\pi nt}{T}} = \underline{i\frac{2\pi n}{T}e^{i\frac{2\pi nt}{T}}} \tag{1}$$

(b)

$$\begin{aligned}
\int_0^T e^{i\frac{2\pi nt}{T}}dt &= \frac{T}{2\pi ni}\left[e^{i\frac{2\pi nt}{T}}\right]_0^T & (2)\\
&= \frac{T}{2\pi ni}(e^{i2\pi n} - e^0) & (3)\\
&= \frac{T}{2\pi ni}(1-1) = \underline{0} & (4)
\end{aligned}$$

よって答えは 0 である。演習問題 (4) **[問題 5]** の結果を使っていることに注意。