

微分方程式論 (10) 定数係数の 2 階非斉次線形微分方程式 (1) (未定係数法) (解答編)

担当: 金丸隆志

学籍番号: _____ 氏名: _____

[問題 1]

以下の微分方程式を解け。

(a) $x'' + 3x' + 2x = e^{-3t}$

(b) $x'' + 4x' + x = e^{-t}$

よって、特殊解は $x_{\text{特殊}}(t) = -\frac{1}{2}e^{-t}$ である。

以上から、問題の非斉次微分方程式の一般解は

$$x(t) = \underline{-\frac{1}{2}e^{-t} + C_1e^{(-2-\sqrt{3})t} + C_2e^{(-2+\sqrt{3})t}}$$

[問題 1 解説]

(a) 特性方程式から 2 つの 2 実数解 $\lambda = -2, -1$ が得られるので、この斉次微分方程式の一般解は $x_{\text{斉次}}(t) = C_1e^{-2t} + C_2e^{-t}$ である。

次に、非斉次微分方程式の特殊解を一つ求める。ここで $x_{\text{特殊}}(t) = Ae^{-3t}$ の形の特殊解を仮定し、問題の非斉次微分方程式が満たされるよう A を定める。1 回微分と 2 回微分を計算すると

$$x'_{\text{特殊}}(t) = -3Ae^{-3t}$$

$$x''_{\text{特殊}}(t) = 9Ae^{-3t}$$

となるので、問題の非斉次微分方程式に代入する。

$$9Ae^{-3t} - 9Ae^{-3t} + 2Ae^{-3t} = e^{-3t}$$

$$2Ae^{-3t} = e^{-3t}$$

$$A = \frac{1}{2}$$

よって、特殊解は $x_{\text{特殊}}(t) = \frac{1}{2}e^{-3t}$ である。

以上から、問題の非斉次微分方程式の一般解は

$$x(t) = \underline{\frac{1}{2}e^{-3t} + C_1e^{-2t} + C_2e^{-t}}$$

(b) 特性方程式から 2 つの 2 実数解 $\lambda = -2 \pm \sqrt{3}$ が得られるので、この斉次微分方程式の一般解は $x_{\text{斉次}}(t) = C_1e^{(-2-\sqrt{3})t} + C_2e^{(-2+\sqrt{3})t}$ である。

次に、非斉次微分方程式の特殊解を一つ求める。ここで $x_{\text{特殊}}(t) = Ae^{-t}$ の形の特殊解を仮定し、問題の非斉次微分方程式が満たされるよう A を定める。1 回微分と 2 回微分を計算すると

$$x'_{\text{特殊}}(t) = -Ae^{-t}$$

$$x''_{\text{特殊}}(t) = Ae^{-t}$$

となるので、問題の非斉次微分方程式に代入する。

$$Ae^{-t} - 4Ae^{-t} + Ae^{-t} = e^{-t}$$

$$-2Ae^{-t} = e^{-t}$$

$$A = -\frac{1}{2}$$

[問題 2]

以下の微分方程式を解け。

$$x'' + 3x' + 2x = e^{-2t}$$

[問題 2 解説]

斉次微分方程式の解は [問題 1](a) と同じく $x_{\text{斉次}}(t) = C_1e^{-2t} + C_2e^{-t}$ である。

次に、 $x_{\text{特殊}}(t) = Ate^{-2t}$ の形を仮定し、問題の非斉次微分方程式が満たされるよう A を定める。1 回微分と 2 回微分を計算すると

$$x'_{\text{特殊}}(t) = Ae^{-2t} - 2Ate^{-2t}$$

$$= A(1 - 2t)e^{-2t}$$

$$x''_{\text{特殊}}(t) = -2Ae^{-2t} - 2A(1 - 2t)e^{-2t}$$

$$= A(-4 + 4t)e^{-2t}$$

となる。積の微分 $(fg)' = f'g + fg'$ を用いていることに注意。これらを問題の非斉次微分方程式に代入して A を定める。

$$A(-4 + 4t)e^{-2t} + 3A(1 - 2t)e^{-2t} + 2Ate^{-2t} = e^{-2t}$$

$$-Ae^{-2t} = e^{-2t}$$

$$A = -1$$

よって、特殊解は $x_{\text{特殊}}(t) = -te^{-2t}$ である。

以上から、問題の非斉次微分方程式の一般解は

$$x(t) = \underline{-te^{-2t} + C_1e^{-2t} + C_2e^{-t}}$$

である。