微分方程式 演習問題 (7) 定数係数の 2 階斉次線形微分方程式 (2)

担当: 金丸隆志

学籍番号: ＿＿＿＿＿＿＿＿ 氏名: ＿＿＿＿＿＿＿＿

問題

1. 定数係数の 2 階斉次線形微分方程式
$$\frac{d^2y}{dx^2} - 6\frac{dy}{dx} + 9y = 0$$
について、以下の問いに答えよ。
   (a) $y = e^{\lambda x}$ (λ は定数) の形の解を仮定し、問題の微分方程式に代入してみよ。λ に関する方程式が得られるので、それを解け。
   (b) 上で得られた方程式から一つの解 λ_1 が得られたはずである。前回の内容では λ_1, λ_2 が得られたので二つの基本解 $y = e^{\lambda_1 x}$ および $y = e^{\lambda_2 x}$ を仮定できたが、今回はそれができない (2 階の微分方程式の一般解を求めるには、2 つの基本解の重ね合わせが必要)。そこで、$y = e^{\lambda_1 x}$ および $y = xe^{\lambda_1 x}$ の 2 つの解を仮定し、それぞれが問題の微分方程式の解になっていることを確かめてみよ。
   その結果、問題の微分方程式の一般解は $y = C_1e^{\lambda_1 x} + C_2xe^{\lambda_1 x}$ (C_1, C_2 は任意定数) となる。
2. $y'' + 4y' + 13y = 0$
   (a) $y = e^{\lambda x}$ (λ は定数) の形の解を仮定し、問題の微分方程式に代入してみよ。λ に関する方程式が得られるので、それを解け。
   (b) 上で得られた方程式から二つの**複素数解** $\lambda_1, \lambda_2 = \gamma \pm i\omega$ が得られたはずである。この結果、問題の微分方程式の一般解は $y = C_1e^{\lambda_1 x} + C_2e^{\lambda_2 x}$ あるいは $y = C_1e^{(\gamma+i\omega)x} + C_2e^{(\gamma-i\omega)x}$ となる (C_1, C_2 は任意定数)。しかし、このままでは解のイメージがつかみにくいため、この形のまま解とすることはあまりない。
   そこで、$y = C_1e^{(\gamma+i\omega)x} + C_2e^{(\gamma-i\omega)x}$ を変型して、$y = C_1'e^{\gamma x}\cos(\omega x) + C_2'e^{\gamma x}\sin(\omega x)$ の形の解となることを導け (C_1', C_2' は C_1, C_2 とは異なる任意定数である)。
   ただし、オイラーの公式 $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$ を用いよ。

1. または 2. と同様の方法で、以下の微分方程式の一般解を求めよ。

3. $y'' - 4y' + 4y = 0$
4. $y'' - 2\sqrt{3}y' + 3y = 0$
5. $y'' + 2y' + 2y = 0$
6. $y'' + 4y = 0$

[**解答**]

1.(a) $y = e^{\lambda}$ を問題の微分方程式に代入すると、特性方程式
$$\lambda^2 - 6\lambda + 9 = 0$$
が得られる (特性方程式については第 6 回参照)。これより、
$$\begin{aligned} (\lambda - 3)^2 &= 0 \\ \lambda &= 3 \end{aligned}$$
となり、**重解** $\lambda = 3$ が得られる。

1.(b) まず、$y = e^{3x}$ が解となることを示そう。$y' = 3e^{3x}$、$y'' = 9e^{3x}$ を問題の微分方程式に代入すると、
$$\begin{aligned} y'' - 6y' + 9y &= 9e^{3x} - 6(3e^{3x}) + 9e^{3x} \\ &= 0 \end{aligned}$$
より、確かに $y = e^{3x}$ は問題の微分方程式の解である。

次に、$y = xe^{3x}$ が解となっていることを示そう。$y' = e^{3x} + 3xe^{3x} = (3x+1)e^{3x}$ であり、さらに $y'' = 3e^{3x} + (3x+1)3e^{3x} = (9x+6)e^{3x}$ が得られる ($(fg)' = f'g + fg'$ を用いたことに注意)。これらを代入すると、
$$\begin{aligned} y'' - 6y' + 9y &= (9x+6)e^{3x} - 6(3x+1)e^{3x} + 9xe^{3x} \\ &= 0 \end{aligned}$$
よって、確かに $y = xe^{3x}$ も問題の微分方程式の解である。

以上から、この微分方程式の一般解は $y = C_1e^{3x} + C_2xe^{3x}$ である。

2.(a) $y = e^{\lambda}$ を問題の微分方程式に代入すると、特性方程式
$$\lambda^2 + 4\lambda + 13 = 0$$

が得られる。これを解の公式を用いて解くと、

$$\lambda = -2 \pm 3i$$

という異なる 2 つの虚数解が得られる。

2.(b) 2.(a) で求めた解より、この微分方程式の一般解は $y = C_1 e^{(-2+3i)x} + C_2 e^{(-2-3i)x}$ と書ける。これを、問題文の形になるように変形していこう。

$$\begin{aligned} y &= C_1 e^{(-2+3i)x} + C_2 e^{(-2-3i)x} \\ &= C_1 e^{-2x} e^{i(3x)} + C_2 e^{-2x} e^{i(-3x)} \\ &= e^{-2x}(C_1 e^{i(3x)} + C_2 e^{i(-3x)}) \end{aligned}$$

ここで、オイラーの公式を用いると、

$$\begin{aligned} y &= e^{-2x}\{C_1(\cos(3x) + i\sin(3x)) \\ &\quad + C_2(\cos(-3x) + i\sin(-3x))\} \\ &= e^{-2x}\{C_1(\cos(3x) + i\sin(3x)) \\ &\quad + C_2(\cos(3x) - i\sin(3x))\} \\ &= e^{-2x}\{(C_1 + C_2)\cos(3x) + i(C_1 - C_2)\sin(3x)\} \end{aligned}$$

ここで、$\cos(-\theta) = \cos\theta$, $\sin(-\theta) = -\sin\theta$ を用いたことに注意。最後に、$C_1 + C_2 = C_1'$、$i(C_1 - C_2) = C_2'$ と置き直せば

$$\begin{aligned} y &= e^{-2x}(C_1' \cos(3x) + C_2' \sin(3x)) \\ &= C_1' e^{-2x} \cos(3x) + C_2' e^{-2x} \sin(3x) \end{aligned}$$

となり、$y = C_1' e^{-2x}\cos(3x) + C_2' e^{-2x}\sin(3x)$ が確かに問題の微分方程式の一般解になっていることがわかった。

3. $y = e^{\lambda}$ を問題の微分方程式に代入すると、特性方程式

$$\lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0$$

が得られる。これを解くと、重解 $\lambda = 2$ が得られる。よって、一般解は $\underline{y = C_1 e^{2x} + C_2 x e^{2x} \ (C_1, C_2 \text{ は任意定数})}$ である。

4. $y = e^{\lambda}$ を問題の微分方程式に代入すると、特性方程式

$$\lambda^2 - 2\sqrt{3}\lambda + 3 = 0$$

が得られる。これを解くと、重解 $\lambda = \sqrt{3}$ が得られる。よって、一般解は $\underline{y = C_1 e^{\sqrt{3}x} + C_2 x e^{\sqrt{3}x} \ (C_1, C_2 \text{ は任意定数})}$ である。

5. $y = e^{\lambda}$ を問題の微分方程式に代入すると、特性方程式

$$\lambda^2 + 2\lambda + 2 = 0$$

が得られる。これを解くと、2 つの異なる虚数解 $\lambda = -1 \pm i$ が得られる。よって、一般解は $\underline{y = C_1 e^{-x}\cos x + C_2 e^{-x}\sin x \ (C_1, C_2 \text{ は任意定数})}$

6. $y = e^{\lambda}$ を問題の微分方程式に代入すると、特性方程式

$$\lambda^2 + 4 = 0$$

が得られる。これを解くと、2 つの異なる虚数解 $\lambda = \pm 2i$ が得られる。よって、一般解は $\underline{y = C_1\cos(2x) + C_2\sin(2x) \ (C_1, C_2 \text{ は任意定数})}$

[**補足**] 以上の知識を用いると、ばね系の運動方程式

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx \tag{1}$$

の解が $x = C_1 \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right) + C_2 \sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right)$ であることや、ばね=ダンパ系の運動方程式

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -c\frac{dx}{dt} - kx \tag{2}$$

の解が $x = e^{-\gamma t}(C_1\cos(\omega t) + C_2\sin(\omega t))$ の形に書けることなどがわかる。ただし、$\gamma = c/(2m)$, $\omega = \sqrt{4mk - c^2}/(2m)$ であり、$4mk - c^2 > 0$ と仮定した。