微分方程式 演習問題 (4) 斉次方程式と非斉次方程式

担当: 金丸隆志

学籍番号: ________ 氏名: ________

問題
以下の微分方程式を解け。

1. $y' - 2y = 0$
2. $y' - 2y = e^{3x}$
3. $xy' + y = 4x(1 + x^2)$
4. $y' + (1 + 2x)y = xe^{-x^2}$

[**解答**]
1. これは**斉次方程式**であるので、**変数分離形**の解法で解くことができる。$y \neq 0$ を仮定し、整理すると

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = 2$$

となる。両辺を x で積分すると

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{y}\,dy &= \int 2\,dx \\ \log|y| &= 2x + C \\ |y| &= e^{2x+C} \\ y &= \pm e^C e^{2x} \\ y &= Ae^{2x} \quad (A \neq 0) \end{aligned} \tag{i}$$

ここで、$y = 0$ を仮定すると、これも問題の微分方程式を満たす。これは (i) 式において $A = 0$ と置いた場合に相当するから、解は $\underline{y = Ae^{2x} \quad (A\text{ は任意})}$。

2.[**公式なしの解法**] これは 1. の**斉次方程式**に対する**非斉次方程式**であるので、1. の解の定数 A を x の関数 $A(x)$ とみなす**定数変化法**で解くことができる。

$y = A(x)e^{2x}$ の形の解を仮定し、これを問題の微分方程式に代入する方針をとる。まず、 y の微分は

$$y' = \frac{dA(x)}{dx}e^{2x} + 2A(x)e^{2x}$$

と書ける。ここで $(fg)' = f'g + fg'$ を用いたことに注意。これと $y = A(x)e^{2x}$ を問題の微分方程式の左辺に代入すると、

$$y' - 2y = \frac{dA(x)}{dx}e^{2x} + 2A(x)e^{2x} - 2A(x)e^{2x} = \frac{dA(x)}{dx}e^{2x}$$

これを問題の微分方程式の右辺と結んで、

$$\begin{aligned} \frac{dA(x)}{dx}e^{2x} &= e^{3x} \\ \frac{dA(x)}{dx} &= e^x \end{aligned}$$

これを $A(x)$ に関する微分方程式とみなし、両辺を x で積分すると、

$$A(x) = e^x + C \quad (C\text{ は任意})$$

これを $y = A(x)e^{2x}$ に代入すると、

$$\begin{aligned} y &= (e^x + C)e^{2x} \\ &= \underline{e^{3x} + Ce^{2x} \quad (C\text{ は任意})} \end{aligned}$$

2. [**公式利用の解法**] 非斉次方程式

$$y' + p(x)y = q(x)$$

の解の公式

$$y = e^{-\int p(x)\,dx}\left[\int q(x)e^{\int p(x)\,dx}\,dx + C\right]$$

を用いてこの微分方程式を解くこともできる (ただし、公式を用いる方法は「公式の使い方を間違えるとアウト」、「公式を覚えるのが大変」などの理由から、個人的には勧めない)。今、問題の非斉次方程式は

$$\begin{aligned} p(x) &= -2 \\ q(x) &= e^{3x} \end{aligned}$$

であるから、

$$\begin{aligned} \int p(x)\,dx &= \int(-2)\,dx = -2x \\ \int q(x)e^{\int p(x)\,dx}\,dx &= \int e^{3x}e^{-2x}\,dx \\ &= \int e^x\,dx \\ &= e^x \end{aligned}$$

これらを公式に代入して、

$$\begin{aligned} y &= e^{2x}(e^x + C) \\ &= \underline{e^{3x} + Ce^{2x} \quad (C\text{ は任意})} \end{aligned}$$

3.[**公式なしの解法**] 両辺を x で割ると

$$y' + \frac{1}{x}y = 4(1 + x^2) \tag{ii}$$

これは**非斉次方程式**であるので、まず**斉次方程式**

$$y' + \frac{1}{x}y = 0 \tag{iii}$$

を**変数分離形**の解法で解くことから始める。$y \neq 0$ を仮定し、整理すると

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{x}$$

となる。両辺を x で積分すると

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{y}\, dy &= -\int \frac{1}{x}\, dx \\ \log|y| &= -\log|x| + C \\ \log|xy| &= C \\ |xy| &= e^C \\ xy &= \pm e^C \\ xy &= A \quad (A \neq 0) \\ y &= \frac{A}{x} \quad (A \neq 0) \qquad \text{(iv)} \end{aligned}$$

ここで、$y = 0$ を仮定すると、これも斉次方程式 (iii) 式を満たす。これは (iv) 式において $A = 0$ と置いた場合に相当するから、斉次方程式の解は $y = \frac{A}{x}$ （A は任意)。さて、問題の非斉次方程式 (ii) 式の解は、斉次方程式の解の定数 A を x の関数 $A(x)$ とみなす**定数変化法**で解くことができる。

$y = \frac{A(x)}{x}$ の形の解を仮定し、これを問題の微分方程式に代入する方針をとる。まず、 y の微分は

$$y' = \frac{\frac{dA(x)}{dx}x - A(x)}{x^2}$$

と書ける。ここで $(f/g)' = (f'g - fg')/g^2$ を用いたことに注意。これと $y = \frac{A(x)}{x}$ を問題の微分方程式 (ii) 式の左辺に代入すると、

$$y' + \frac{1}{x}y = \frac{\frac{dA(x)}{dx}x - A(x)}{x^2} + \frac{1}{x}\frac{A(x)}{x} = \frac{1}{x}\frac{dA(x)}{dx}$$

これを (ii) 式の右辺と結んで、

$$\begin{aligned} \frac{1}{x}\frac{dA(x)}{dx} &= 4(1+x^2) \\ \frac{dA(x)}{dx} &= 4(x+x^3) \end{aligned}$$

これを $A(x)$ に関する微分方程式とみなし、両辺を x で積分すると、

$$A(x) = 2x^2 + x^4 + C \quad (C \text{ は任意})$$

これを $y = \frac{A(x)}{x}$ に代入すると、

$$\begin{aligned} y &= \frac{2x^2 + x^4 + C}{x} \quad (C \text{ は任意}) \\ &= \underline{2x + x^3 + \frac{C}{x} \quad (C \text{ は任意})} \end{aligned}$$

3. [**公式利用の解法**] 非斉次方程式

$$y' + p(x)y = q(x)$$

の解の公式

$$y = e^{-\int p(x)\, dx}\left[\int q(x)e^{\int p(x)\, dx}\, dx + C\right]$$

を用いてこの微分方程式を解くこともできる。今、問題の非斉次方程式は

$$\begin{aligned} p(x) &= \frac{1}{x} \\ q(x) &= 4(1+x^2) \end{aligned}$$

であるから、

$$\begin{aligned} \int p(x)\, dx &= \int \frac{1}{x}\, dx = \log|x| \\ \int q(x)e^{\int p(x)\, dx}\, dx &= \int 4(1+x^2)e^{\log|x|}\, dx \\ &= \int 4(1+x^2)|x|\, dx \qquad \text{(v)} \end{aligned}$$

なお、$e^{\log a} = a$ を用いた。なお、(v) 式は場合分けが必要で、$x \geq 0$ のときは

$$\begin{aligned} (v)\text{ 式} &= \int 4(1+x^2)x\, dx \\ &= \int 4(x+x^3)\, dx \\ &= 2x^2 + x^4 \end{aligned}$$

であり、$x < 0$ のときは

$$\begin{aligned} (v)\text{ 式} &= \int 4(1+x^2)(-x)\, dx \\ &= -2x^2 - x^4 \end{aligned}$$

さて、これらを公式に代入するのだが、やはり場合分けが必要である。$x \geq 0$ のときは

$$\begin{aligned} y &= e^{-\log x}(2x^2 + x^4 + C) \\ &= \frac{1}{x}(2x^2 + x^4 + C) \\ &= 2x + x^3 + \frac{C}{x} \quad (C \text{ は任意}) \end{aligned}$$

$x < 0$ のときは

$$\begin{aligned} y &= e^{-\log(-x)}(-2x^2 - x^4 + C) \\ &= \frac{1}{-x}(-2x^2 - x^4 + C) \\ &= 2x + x^3 - \frac{C}{x} \quad (C \text{ は任意}) \end{aligned}$$

C の前の負号は C が任意であることより吸収できるので、結局どちらの場合も同じ解になる。すなわち、

$$\underline{y = 2x + x^3 + \frac{C}{x} \quad (C \text{ は任意})}$$

このように、公式利用と言えど、解法が繁雑になることもある。これも公式利用を勧めない理由の一つ。

4. [**公式なしの解法**] これは**非斉次方程式**であるので、まず**斉次方程式**

$$y' + (1+2x)y = 0 \tag{vi}$$

を**変数分離形**の解法で解くことから始める。$y \neq 0$ を仮定し、整理すると

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = -1 - 2x$$

となる。両辺を x で積分すると

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{y}\, dy &= \int (-1-2x)\, dx \\
\log|y| &= -x - x^2 + C \\
|y| &= e^{-x-x^2+C} \\
y &= \pm e^C e^{-x-x^2} \\
y &= Ae^{-x-x^2} \quad (A \neq 0) \qquad \text{(vii)}
\end{aligned}$$

ここで、$y = 0$ を仮定すると、これも斉次方程式 (vi) 式を満たす。これは (vii) 式において $A = 0$ と置いた場合に相当するから、斉次方程式の解は $y = Ae^{-x-x^2}$ (A は任意)。さて、問題の非斉次方程式の解は、斉次方程式の解の定数 A を x の関数 $A(x)$ とみなす**定数変化法**で解くことができる。

$y = A(x)e^{-x-x^2}$ の形の解を仮定し、これを問題の微分方程式に代入する方針をとる。まず、y の微分は

$$y' = \frac{dA(x)}{dx}e^{-x-x^2} + A(x)(-1-2x)e^{-x-x^2}$$

と書ける。ここで $(fg)' = f'g + fg'$ および $f(g(x))' = f'(g(x))g'(x)$ を用いたことに注意。これと $y = A(x)e^{-x-x^2}$ を問題の微分方程式の左辺に代入すると、

$$\begin{aligned}
y' + (1+2x)y &= \frac{dA(x)}{dx}e^{-x-x^2} + A(x)(-1-2x)e^{-x-x^2} \\
&\quad + (1+2x)A(x)e^{-x-x^2} \\
&= \frac{dA(x)}{dx}e^{-x-x^2}
\end{aligned}$$

これを問題の微分方程式の右辺と結んで、

$$\begin{aligned}
\frac{dA(x)}{dx}e^{-x-x^2} &= xe^{-x^2} \\
\frac{dA(x)}{dx} &= xe^x
\end{aligned}$$

これを $A(x)$ に関する微分方程式とみなし、両辺を x で積分すると、

$$\begin{aligned}
A(x) &= \int xe^x\, dx \\
&= xe^x - \int e^x\, dx \\
&= xe^x - e^x + C \quad (C \text{ は任意})
\end{aligned}$$

となる。部分積分の公式を用いたことに注意。これを $y = A(x)e^{-x-x^2}$ に代入すると、

$$\begin{aligned}
y &= (xe^x - e^x + C)e^{-x-x^2} \quad (C \text{ は任意}) \\
&= \underline{xe^{-x^2} - e^{-x^2} + Ce^{-x-x^2} \quad (C \text{ は任意})}
\end{aligned}$$

4. [**公式利用の解法**] 非斉次方程式

$$y' + p(x)y = q(x)$$

の解の公式

$$y = e^{-\int p(x)\, dx}\left[\int q(x)e^{\int p(x)\, dx}\, dx + C\right]$$

を用いてこの微分方程式を解くこともできる。今、問題の非斉次方程式は

$$\begin{aligned}
p(x) &= 1 + 2x \\
q(x) &= xe^{-x^2}
\end{aligned}$$

であるから、

$$\begin{aligned}
\int p(x)\, dx &= \int (1+2x)\, dx = x + x^2 \\
\int q(x)e^{\int p(x)\, dx}\, dx &= \int xe^{-x^2}e^{x+x^2}\, dx \\
&= xe^x - \int e^x\, dx \\
&= xe^x - e^x
\end{aligned}$$

部分積分の公式を用いた。

これらを公式に代入すると、

$$\begin{aligned}
y &= e^{-x-x^2}(xe^x - e^x + C) \\
&= \underline{xe^{-x^2} - e^{-x^2} + Ce^{-x-x^2} \quad (C \text{ は任意})}
\end{aligned}$$