微分方程式 演習問題 (1) 微分方程式とは何か

担当: 金丸隆志

学籍番号: ________________ 氏名: ________________

問題 1

かっこ内の関数が、与えられたの微分方程式の解になっていることを確認せよ。

1. $\dfrac{dy}{dx} = -\gamma y$
   ($y = Ae^{-\gamma x}$, A: 任意定数)

2. $\dfrac{d^2y}{dx^2} = -\omega^2 y$
   ($y = A\sin(\omega x + \theta)$, A, θ: 任意定数)

[**解答**]

1.
$$\begin{aligned} y' &= -\gamma A e^{-\gamma x} \\ &= -\gamma y \end{aligned}$$

2.
$$\begin{aligned} y' &= A\omega\cos(\omega x + \theta) \\ y'' &= -A\omega^2\sin(\omega x + \theta) \\ &= -\omega^2(A\sin(\omega x + \theta)) \\ &= -\omega^2 y \end{aligned}$$

問題 2

以下の微分方程式の一般解を求めよ。

$$y' = e^x \sin x$$

[**解答**] $y = \int e^x \sin x \ dx + C$ であるが、ここで $I = \int e^x \sin x \ dx$ と置く (ここからは受験数学の復習)。

$$\begin{aligned} I &= e^x \sin x - \int e^x \cos x \ dx \quad (\text{部分積分}, f' = e^x, g = \sin x) \\ &= e^x \sin x - \left[e^x \cos x - \int e^x(-\sin x) \ dx \right] \\ &\qquad (\text{再び部分積分}, f' = e^x, g = \cos x) \\ &= e^x \sin x - e^x \cos x - \int e^x \sin x \ dx \\ &= e^x(\sin x - \cos x) - I \end{aligned}$$

ここで右辺の I を左辺に移項して、

$$\begin{aligned} 2I &= e^x(\sin x - \cos x) \\ I &= \frac{1}{2}e^x(\sin x - \cos x) \end{aligned}$$

よって解は $\underline{y = \frac{1}{2}e^x(\sin x - \cos x) + C}$

問題 3

以下の微分方程式の一般解を求めよ。また、$x = 0$ のとき $y = -1$ を満たす特別解も求めよ。

$$e^{3x}\frac{dy}{dx} = x$$

[**解答**] 直接積分形微分方程式の形にするため、両辺を e^{3x} で割って $y' = xe^{-3x}$ とする (**重要!**)。これを積分すれば解が得られる。やはり部分積分を用いる。

$$\begin{aligned} y &= \int xe^{-3x} \ dx + C \\ &= -\frac{1}{3}xe^{-3x} - \int \left(-\frac{1}{3}e^{-3x}\right) dx + C \\ &= -\frac{1}{3}xe^{-3x} + \frac{1}{3}\int e^{-3x} \ dx + C \\ &= \underline{-\frac{1}{3}xe^{-3x} - \frac{1}{9}e^{-3x} + C} \end{aligned}$$

これが一般解である。特殊解は $x = 0$ を代入して

$$\begin{aligned} y &= -\frac{1}{9} + C = -1 \\ C &= -\frac{8}{9} \end{aligned}$$

よって、特殊解は $\underline{y = -\frac{1}{3}xe^{-3x} - \frac{1}{9}e^{-3x} - \frac{8}{9}}$