

複数モジュールを持つ興奮性／抑制性パルスニューラルネットワークにおけるブローアウト分岐とオンオフ間欠性

金丸 隆志[†] 関根 優年[†]

[†] 東京農工大学 工学部 〒184-8588 東京都小金井市中町 2-24-16
E-mail: kanamaru [at] sekine-lab.ei.tuat.ac.jp

あらまし 二つのモジュールを持つパルスニューラルネットワークにおけるカオス同期を考える。1 モジュールは興奮性素子集団と抑制性素子集団から構成され、パラメータを選ぶことで、同期周期解や同期カオス解が見られることが知られている。このようなモジュールを 2 つ結合させ、この 2 モジュールがカオス同期を起こすかどうかを解析する。同期状態の横断リアプノフ指数を調べることで、カオス同期状態が安定な状態から不安定に転移するブローアウト分岐を見出し、さらにネットワークの同期状態がオンオフ間欠性的に壊れるような時系列が観測された。(信学技報, Vol.104, No.293, (CAS2004-40, NLP2004-52), pp.73-78, (2004)).

キーワード パルスニューラルネットワーク, 振動, 同期, カオス, ブローアウト分岐, オンオフ間欠性

Blowout bifurcation and on-off intermittency in a pulse neural network with two modules

Takashi KANAMARU[†] and Masatoshi SEKINE[†]

[†] Department of Electrical and Electronic Engineering, Faculty of Technology, Tokyo University of Agriculture and Technology, Tokyo 184-8588, Japan
E-mail: kanamaru [at] sekine-lab.ei.tuat.ac.jp

Abstract Chaotic synchronization between two modules of pulse neural networks is considered. One module is composed of both excitatory neurons and inhibitory neurons, and, in such a module, the synchronized periodic firings or the synchronized chaotic firings appear depending on the parameter values. And we analyze the stability of the chaotically synchronized state between two modules. By examining the transversal Lyapunov exponent, it is found that the blowout bifurcation takes place, and the network shows intermittent breaking of synchronization which is characterized by the on-off intermittency.

Key words pulse neural network, synchronization, oscillation, chaos, blowout bifurcation, on-off intermittency

1. はじめに

神経系においてカオスを観測しようという試みの歴史は古く、イソアワモチの巨大ニューロンやヤリイカの巨大軸索に対して周期外力を加えることで様々なカオス現象が観測されている [1], [2]. しかし、ニューロンが現実には動作している際にそのようなカオスが存在し得るのか、あるいは存在し得たとしてもカオスが情報処理において有用な役割を果たしているかどうかは明らかではない。

一方、モデル研究においては、従来のニューラルネットワークの枠組みにカオス的な乱雑さを導入することで、記憶間の遷移や、局所解からの脱出などにカオスが利用されている [3]~[6]. これらのモデルで見られるカオスは、大自由度カオス系でしばしば議論されるカオスの遍歴現象 [7] に関係が深いと考えられ

る。しかし、これらの現象は形式的なモデルニューロンのネットワークにて報告されたものであり、これらが、より詳細なモデルであるパルスニューラルネットワークをもとに基礎づけられるかはやはり自明ではない。

そこで、本研究ではパルスニューラルネットワークにおいて大自由度カオスがどのように生じ、またどのようなダイナミクスを持つかを議論するため、興奮性集団と抑制性集団が結合したパルスニューラルネットワークを考える。このネットワーク 1 モジュールの解析には、Fokker-Planck 方程式を用いた平衡点まわりの線形解析が有効であり、そこでは系のパラメータの値によって様々な同期パターンが見られる [8]. 特に、本研究では 1 モジュールがカオス同期を見せるパラメータに着目する。そして、このようなモジュールを 2 つ接続した際の同期現象を解析する。あるパラメータではモジュール間のカオス同期状態

が安定であるが、同期状態の不安定化によってブローアウト分岐 [9] が起こり、オンオフ間欠性 [10]~[12] に特徴的な時系列が見られた。モジュール間のカオス同期状態とその不安定化は、同期した集団の組み替えを誘発するという意味で、カオスの遍歴現象の基礎となるものである。

2. 興奮性/抑制性ニューロンの結合系 (1 モジュール系)

ここでは以下の興奮性ニューロン N_E 個と抑制性ニューロン N_I 個の結合系

$$\dot{\theta}_E^{(i)} = (1 - \cos \theta_E^{(i)}) + (1 + \cos \theta_E^{(i)}) \times (r_E + \xi_E^{(i)}(t) + I_{EE}(t) - I_{EI}(t)), \quad (1)$$

$$\dot{\theta}_I^{(i)} = (1 - \cos \theta_I^{(i)}) + (1 + \cos \theta_I^{(i)}) \times (r_I + \xi_I^{(i)}(t) + I_{IE}(t) - I_{II}(t)), \quad (2)$$

$$I_{XY}(t) = \frac{g_{XY}}{2N_Y} \sum_{j=1}^{N_Y} \sum_k \frac{1}{\kappa_Y} \exp\left(-\frac{t-t_k^{(j)}}{\kappa_Y}\right), \quad (3)$$

$$\langle \xi_X^{(i)}(t) \xi_Y^{(j)}(t') \rangle = D \delta_{XY} \delta_{ij} \delta(t-t'), \quad (4)$$

を考える。ただし、 X, Y は興奮性集団 E または抑制性集団 I のどちらかを表す。 N_Y は集団 Y の素子数、 g_{XY} は集団 Y から集団 X への結合の強さ、 δ_{XY} 、 δ_{ij} は Kronecker のデルタである。

なお、集団 Y から集団 X へのシナプス入力 I_{XY} は

$$I_{XY}(t) = \frac{g_{XY}}{N_Y} \sum_{j=1}^{N_Y} I_Y^{(j)}, \quad (5)$$

$$\dot{I}_Y^{(j)} = -\frac{1}{\kappa_Y} \left(I_Y^{(j)} - \delta(\theta_Y^{(j)} - \pi) \right), \quad (6)$$

と書き直せることに注意しよう。

(1), (2), (5), (6) 式で表される系は slowly connected class 1 networks の canonical model になっている [13], [14]。すなわち、遅い結合で平均場結合している class 1 ニューロンの結合系は上の方程式に変換できる。ただし、ここではパラメータ r_E 、 r_I やノイズ強度 D がネットワーク内で一様であるという仮定を設けた。

ノイズ項 $\xi_X^{(i)}(t)$ と結合項 I_{XY} が存在しないとき、 $r_X > 0$ が満たされると系は自励振動をする。一方、 $r_X < 0$ であれば素子は安定平衡点をもつ excitable system となる。この安定平衡点は

$$\theta_0 = -\arccos \frac{1+r_X}{1-r_X}, \quad (7)$$

であり、 r_X が 0 に近いと θ_0 は 0 に近づく。本研究では $r_X < 0$ を満たす excitable な素子を用いる。

以後、この興奮性素子と抑制性素子からなる結合系を「1 モジュール系」と呼ぶことにする。ここで、1 モジュール系において見られる同期振動の解析を行おう。この系の振舞いは文献 [8] で解析されている exponentially coupled active rotator 系の振舞いにほぼ等しいので、ここでは簡単な紹介にとどめる。

今、素子のパラメータとして $r_E = -0.025$ 、 $r_I = -0.025$ を

考えよう。 $N_E, N_I \rightarrow \infty$ の極限における系の振舞いは、付録 1. に示す Fokker-Planck 方程式を用いて解析することができる。いま、簡単のため集団間の結合を $g_{EE} = g_{II} \equiv g_{int} = 4$ 、 $g_{EI} = g_{IE} \equiv g_{ext}$ と定める。このパラメータにおいてノイズ強度 D と集団間結合強度 g_{ext} に関して系の分岐図を付録 2. の手法により数値的に調べて描くと図 1 のようになる。

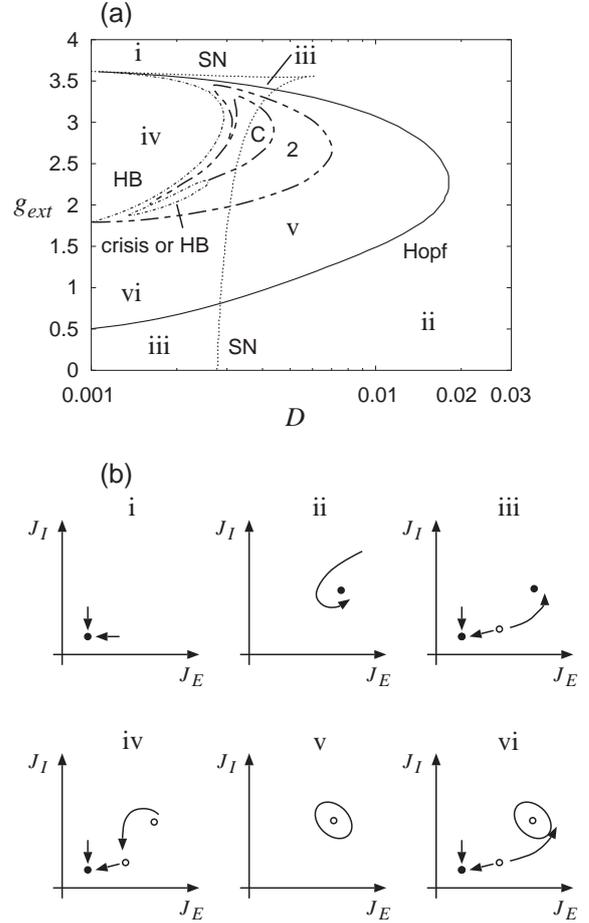


図 1 (a) (D, g_{ext}) 平面における分岐図。実線は Hopf 分岐、点線は saddle-node 分岐、一点鎖線は homoclinic 分岐または crisis を表す。二点鎖線は周期倍分岐とカオスへの転移点のラフスケッチである。(b) (J_E, J_I) 平面における流れの模式図。黒丸は安定平衡点、白丸は不安定平衡点を表す。閉曲線は安定なリミットサイクルを表す。また、略語は以下を表す。SN - saddle-node, HB - homoclinic bifurcation。

各領域に振られたギリシャ数字は、図 1(b) に示した確率流平面 (J_E, J_I) 上での流れの模式図に対応している。確率流 J_E 、 J_I の定義は付録 1. にて与えられているが、興奮性集団、抑制性集団それぞれの集団発火頻度と解釈することができる。また、確率流が時間的に変化しなければ集団は非同期発火をしており、確率流に時間依存性があれば集団の発火はある程度の同期を伴う。

ここで、図 1(b) を用いて分岐図を理解しよう。まず、ノイズ強度 D が小さいとき、流れの模式図 i, iii, iv などのように原点に近い安定平衡点が存在する。これは、ノイズ強度が小さいために全素子がほとんどの間、各素子の安定平衡点のまわりで

揺らいでいる状態を表している。一方ノイズ強度 D が大きいときは流れの模式図 ii のように、系の安定な状態は発火頻度の大きい安定平衡点しか存在しない。これは素子レベルでみると、全素子が同期せずに高い頻度で発火し続ける状態に対応する。

これらの安定平衡点が Hopf 分岐や saddle-node on limit cycle 分岐で消滅するときに同期周期解が現れる。また、double limit cycle 分岐や homoclinic 分岐で同期周期解が現れることもある。詳細は文献 [8] を参照。

また、limit cycle が周期倍分岐を起こし、カオスへ至る分岐も見られる。分岐図 1(a) にて、“2”、“C” とラベルがふられた領域は、それぞれサイクル 2 の周期解とカオス解が存在する領域のラフスケッチである。他のサイクルの周期解の存在する領域は、範囲が狭いので省略した。 $D = 0.0042$, $g_{int} = 4$, $g_{ext} = 2.8$ における系のカオス的な振舞いを図 2 に示した。図 2(a) は

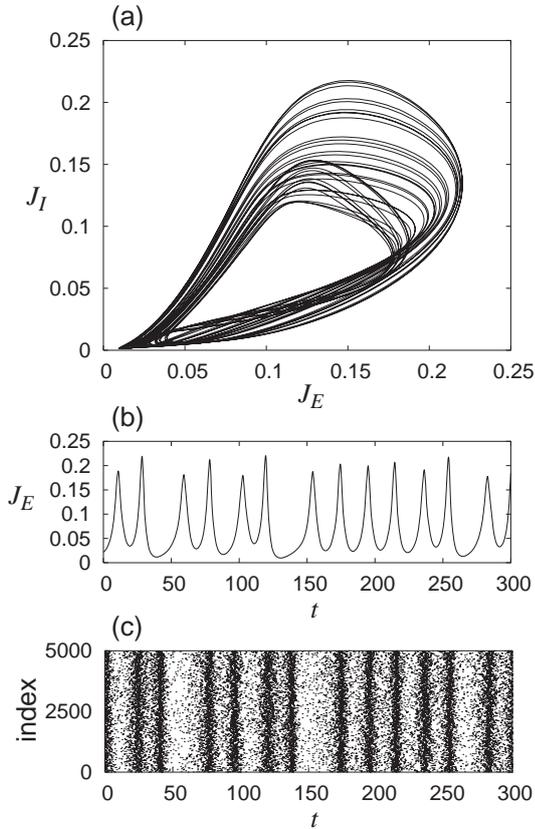


図 2 (a) (J_E, J_I) 平面における流れ。 (b) J_E の時系列。 (c) $N_E = N_I = 5000$ なる系の興奮性素子の発火時刻のラスタプロット。全て $D = 0.0042$, $g_{int} = 4$, $g_{ext} = 2.8$ 。

(J_E, J_I) 平面における流れ、図 2(b) は J_E の時系列、図 2(c) は $N_E = N_I = 5000$ なる系の興奮性素子の発火時刻のラスタプロットである。素子がカオス的に振舞いつつ同期していることがわかる。

(J_E, J_I) 平面における流れにおいて、 $J_E = 0.125$ ($dJ_E/dt > 0$) にて Poincaré 断面をとったときのアトラクターの D 依存性を図 3(a) に示した。周期倍分岐とカオスが見られる。さらに、対応する最大リアプノフ数を付録 2. の方法で計算したのが図 3(b) である。カオス的な振舞いがみられるパラメータで最大リアプノフ数が正となるのがわかる。

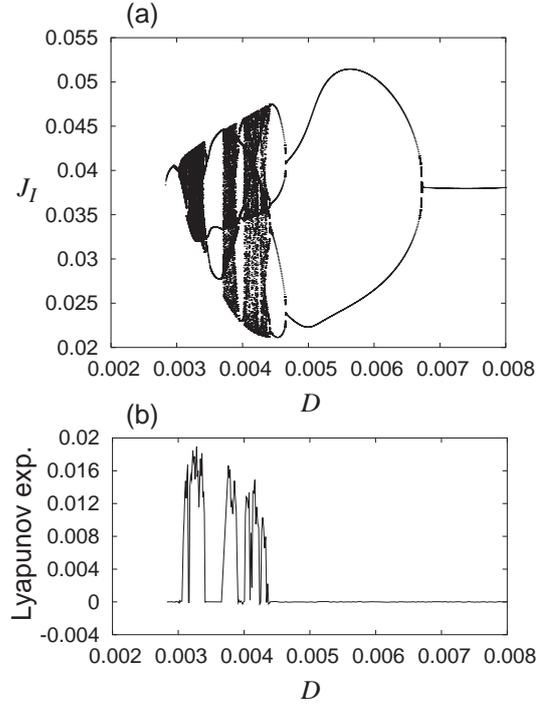


図 3 $g_{int} = 4$, $g_{ext} = 2.8$ における Poincaré 断面の D 依存性。周期倍分岐とカオスが見られる。Poincaré 断面は、 $J_E = 0.125$ ($dJ_E/dt > 0$) とした。

3. 2 モジュール系

以後、前章で取り扱った 1 モジュール系を 2 つ結合させた 2 モジュール系を考える。

$$\begin{aligned} \theta_{E_k}^{(i)} &= (1 - \cos \theta_{E_k}^{(i)}) + (1 + \cos \theta_{E_k}^{(i)}) \\ &\quad \times (r_{E_k} + \xi_{E_k}^{(i)}(t) + I_{E_k E_k}(t) - I_{E_k I_k}(t) \\ &\quad + I_{E_k E_l}(t) - I_{E_k I_l}(t)), \end{aligned} \quad (8)$$

$$\begin{aligned} \theta_{I_k}^{(i)} &= (1 - \cos \theta_{I_k}^{(i)}) + (1 + \cos \theta_{I_k}^{(i)}) \\ &\quad \times (r_{I_k} + \xi_{I_k}^{(i)}(t) + I_{I_k E_k}(t) - I_{I_k I_k}(t) \\ &\quad + I_{I_k E_l}(t) - I_{I_k I_l}(t)), \end{aligned} \quad (9)$$

$$l \equiv |k - 1|, \quad (10)$$

ただし、モジュールの添字 k は $k = 0, 1$ であるとする。今、同一モジュール内の結合強度は $g_{E_k E_k} = g_{EE}$, $g_{I_k I_k} = g_{II}$, $g_{E_k I_k} = g_{I_k E_k} = g_{ext}$ とし、異なるモジュール間の結合は $g_{X_k Y_l} \equiv \epsilon_{XY}(k \neq l)$ のように対称とする。

このような系において、モジュール間のカオス同期を考える。今、1 モジュールにおいてカオスを生ずるパラメータの組を D^* , g_{EE}^* , g_{II}^* , g_{ext}^* としよう。例えば図 2 のカオス同期では $D^* = 0.0042$, $g_{EE}^* = g_{II}^* = 4$, $g_{ext}^* = 2.8$ であった。いま、それぞれ g_{EE}^* , g_{II}^* , g_{ext}^* の結合強度で内部結合した 2 つのモジュールを結合しても、モジュール間のカオス同期は起こらない。これは、素子間の結合が拡散結合ではなく、exponential 関数によるシナプス結合になっているためである。そこで、2 モジュール間にてカオス同期を起こすため、図 4 のような結合強度の配置を考えよう。すなわち、モジュール間結合強度を ϵ_{EE} ,

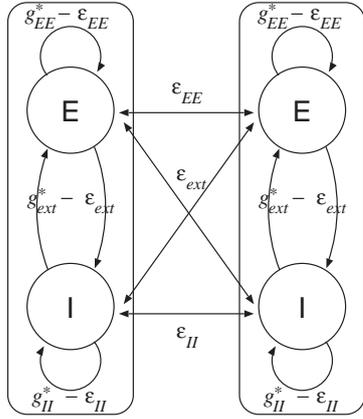


図4 2モジュール系の結合強度の配置.

ϵ_{II} , ϵ_{ext} としたとき, モジュール内の結合強度を $g_{EE}^* - \epsilon_{EE}$, $g_{II}^* - \epsilon_{II}$, $g_{ext}^* - \epsilon_{ext}$ とするのである. いま, 各モジュールの確率密度関数の Fourier 係数と入力ベクトルをそれぞれ \mathbf{x}_0 , \mathbf{x}_1 と書こう (付録 2. 参照). 上記の結合により, 2モジュール結合系は $\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}_1$ なる同期状態を特解としてもち, この特解は g_{ext}^* , g_{EE}^* , g_{II}^* の結合強度で特徴づけられるカオスダイナミクスである.

この特解の安定性はモジュール間結合強度 ϵ_{EE} , ϵ_{II} , ϵ_{ext} に依存する. いま, パラメータを $D = 0.0042$, $g_{EE}^* = g_{II}^* = 4$, $g_{ext}^* = 2.8$, $\epsilon_{EE} = 0.4$, $\epsilon_{II} = 0$ に固定し, ϵ_{ext} の値に関する特解の安定性の依存性を調べよう. いま, $\epsilon_{ext} = 0.512$ および $\epsilon_{ext} = 0.51$ における $J_{E_0} - J_{E_1}$ の時系列を図示したのが図 5 である. J_{E_k} はモジュール k の興奮性集団の発火率 (確率流) を表す. 図 5(a) では系が同期状態 $\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}_1$ に収束し, 図 5(b) では系が同期状態と非同期状態との間を間欠的に遷移するオンオフ間欠性 [9]~[12] に特徴的な時系列が見られる.

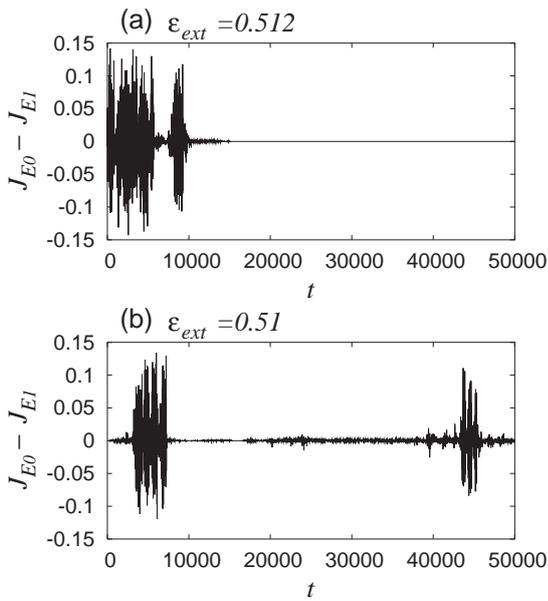


図5 2モジュール結合系の時系列. (a) $\epsilon_{ext} = 0.512$, (b) $\epsilon_{ext} = 0.51$. 他のパラメータは $D = 0.0042$, $g_{EE}^* = g_{II}^* = 4$, $g_{ext}^* = 2.8$, $\epsilon_{EE} = 0.4$, $\epsilon_{II} = 0$.

2つの系がほぼ同期した状態 $\mathbf{x}_0 \sim \mathbf{x}_1$ はラミナー状態, 非同期的状態はバースト状態と呼ばれる. ラミナー状態の継続時間の確率分布を調べると, 図 6 のように, オンオフ間欠性に特徴的なべき則 $\sim \tau^{-1.5}$ が見られる [11], [12]. ラミナー状態の判定に閾値 h を用いたが, べき則は h に依存しないこともわかる.

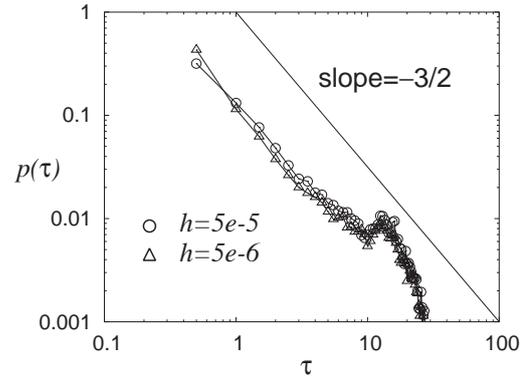


図6 ラミナー状態の継続時間の確率分布. オンオフ間欠性に特徴的なべき則 $\sim \tau^{-1.5}$ が, 閾値 h に依存せずに見られる. パラメータは $D = 0.0042$, $g_{EE}^* = g_{II}^* = 4$, $g_{ext}^* = 2.8$, $\epsilon_{EE} = 0.4$, $\epsilon_{ext} = 0.51$, $\epsilon_{II} = 0$.

ここで, 付録 3. の方法で同期状態 $\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}_1$ に対する横断リアプノフ指数 λ_{\perp} の ϵ_{ext} 依存性を調べたのが図 7 である. $\epsilon_{ext} \sim 0.5105$ にて $\lambda_{\perp} = 0$ となり, $\epsilon_{ext} > 0.5105$ では $\lambda_{\perp} < 0$ となるため同期状態 $\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}_1$ が安定である. 一方, $\epsilon_{ext} < 0.5105$ では $\lambda_{\perp} > 0$ となるため同期状態 $\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}_1$ は不安定となり, 図 5(b) のようなオンオフ間欠性に特徴的な振舞いが見られる. この現象は, 不安定多様体 $\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}_1$ を横断する方向にアトラクターが不安定化する現象で, プロアウト分岐 [9] と呼ばれる.

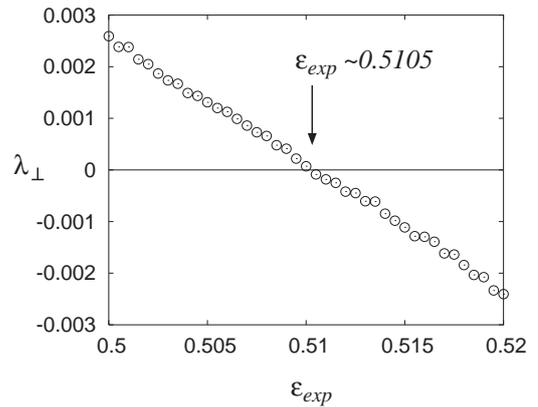


図7 同期状態 $\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}_1$ に対する横断リアプノフ指数 λ_{\perp} の ϵ_{ext} 依存性. パラメータは $D = 0.0042$, $g_{EE}^* = g_{II}^* = 4$, $g_{ext}^* = 2.8$, $\epsilon_{EE} = 0.4$, $\epsilon_{II} = 0$.

$N_{E_k} = N_{I_k} = 5000$ の結合系にてオンオフ間欠の時系列を観測したのが図 8 である. 図 8(a) は興奮性集団の発火率 J_{E_k} の差の時系列である. なお, J_{E_k} は集団 E_k に属する素子の発火時刻 $t_j^{(i)}$ を用いて以下で定義される.

$$J_{E_k}(t) \equiv \frac{1}{N_{E_k}d} \sum_{i=1}^{N_{E_k}} \sum_j \Theta(t - t_j^{(i)}), \quad (11)$$

$$\Theta(t) = \begin{cases} 1 & \text{for } 0 \leq t < d \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}. \quad (12)$$

ここでは $d = 1.0$ とした. 図 8(b) のように, 2 モジュール間の

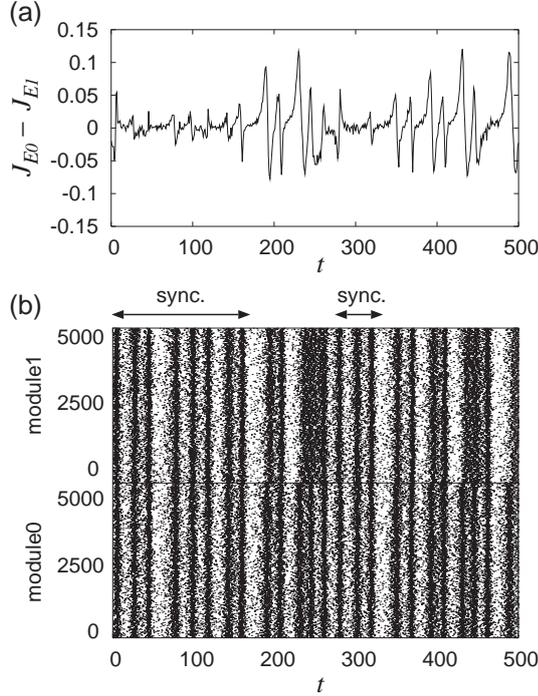


図 8 $N_{E_k} = N_{I_k} = 5000$ の結合系におけるオンオフ間欠性的時系列. パラメータは図 5(b) と同じ.

同期が間欠的に壊れることがわかる.

4. まとめ

パルスニューラルネットワークにおいて大自由度カオスがどのように生じ, またどのようなダイナミクスを持つかを議論するため, 興奮性集団と抑制性集団が結合したパルスニューラルネットワークを解析した. このネットワークを 2 モジュール結合した系を解析したところ, あるパラメータではモジュール間のカオス同期状態が安定であるが, 同期状態の不安定化によってブローアウト分岐 [9] が起こり, オンオフ間欠性 [10]~[12] に特徴的な時系列が見られることが明かになった. モジュール間のカオス同期状態とその不安定化は, 同期した集団の組み替えを誘発するという意味で, カオスの遍歴現象の基礎となるものである. すなわち, パルスニューラルネットワークにおいてカオスの遍歴現象を見出すことができた.

パルスニューラルネットワークにおけるカオスの遍歴に関しては, 4 素子の Bonhöffer-van der Pol モデル結合系にて既に報告されている [17]. この系においてはカオスの遍歴が見られるパラメータ領域は非常に狭いと報告されている. 一方我々の系では, 1 モジュール系にてカオスが見られれば 2 モジュール系でブローアウト分岐を探すことは容易であるため, カオスの

遍歴が見られるパラメータ領域は広いといえる. さらに, これらの現象は全てノイズをパラメータとした分岐によって引き起こされているため, ノイズが存在しても安定して観測することができるという特長がある.

付 録

1. 1 モジュール系の Fokker-Planck 方程式

1 モジュール系の解析には, 時刻 t , 位相 θ_E, θ_I における素子数密度

$$n_E(\theta_E, t) \equiv \frac{1}{N_E} \sum \delta(\theta_E^{(i)} - \theta_E), \quad (A.1)$$

$$n_I(\theta_I, t) \equiv \frac{1}{N_I} \sum \delta(\theta_I^{(i)} - \theta_I), \quad (A.2)$$

に対する連立 Fokker-Planck 方程式 [15], [16]

$$\begin{aligned} \frac{\partial n_E}{\partial t} &= -\frac{\partial}{\partial \theta_E} (A_E n_E) \\ &\quad + \frac{D}{2} \frac{\partial}{\partial \theta_E} \left\{ B_E \frac{\partial}{\partial \theta_E} (B_E n_E) \right\}, \end{aligned} \quad (A.3)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial n_I}{\partial t} &= -\frac{\partial}{\partial \theta_I} (A_I n_I) \\ &\quad + \frac{D}{2} \frac{\partial}{\partial \theta_I} \left\{ B_I \frac{\partial}{\partial \theta_I} (B_I n_I) \right\}, \end{aligned} \quad (A.4)$$

$$\begin{aligned} A_E(\theta_E, t) &= (1 - \cos \theta_E) + (1 + \cos \theta_E) \\ &\quad \times (r_E + I_{EE}(t) - I_{EI}(t)), \end{aligned} \quad (A.5)$$

$$\begin{aligned} A_I(\theta_I, t) &= (1 - \cos \theta_I) + (1 + \cos \theta_I) \\ &\quad \times (r_I + I_{IE}(t) - I_{II}(t)), \end{aligned} \quad (A.6)$$

$$B_E(\theta_E, t) = 1 + \cos \theta_E, \quad (A.7)$$

$$B_I(\theta_I, t) = 1 + \cos \theta_I, \quad (A.8)$$

を用いる. 各素子集団の確率流は

$$J_E(\theta_E, t) = A_E n_E - \frac{D}{2} B_E \frac{\partial}{\partial \theta_E} (B_E n_E), \quad (A.9)$$

$$J_I(\theta_I, t) = A_I n_I - \frac{D}{2} B_I \frac{\partial}{\partial \theta_I} (B_I n_I), \quad (A.10)$$

で定義される.

いま, (3) 式で表される $I_{XY}(t)$ は $N_Y \rightarrow \infty$ で以下の微分方程式に従う.

$$\dot{I}_{XY}(t) = -\frac{1}{\kappa_Y} \left(I_{XY}(t) - \frac{g_{XY}}{2} J_Y(\pi, t) \right), \quad (A.11)$$

(A.3), (A.4) 式の Fokker-Planck 方程式と (A.11) 式によって (1), (2) 式のネットワークの振る舞いを解析することができる.

2. Fokker-Planck 方程式の数値積分法

(A.1), (A.2) 式の素子数密度はそれぞれ θ_E, θ_I に関する 2π 周期関数であるので, 以下のように Fourier 級数展開できる.

$$n_E(\theta_E, t) = \frac{1}{2\pi} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k^E(t) \cos(k\theta_E) + b_k^E(t) \sin(k\theta_E)), \quad (A.12)$$

$$n_I(\theta_I, t) = \frac{1}{2\pi} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k^I(t) \cos(k\theta_I) + b_k^I(t) \sin(k\theta_I)), \quad (A.13)$$

これらを Fokker-Planck 方程式 (A.3), (A.4) に代入することで、級数 a_k^X, b_k^X に対する常微分方程式が導ける。

$$\begin{aligned} \frac{da_k^{(X)}}{dt} = & -(r_X + I_X + 1)kb_k^{(X)} \\ & -(r_X + I_X - 1)\frac{k}{2}(b_{k-1}^{(X)} + b_{k+1}^{(X)}) \\ & -\frac{Dk}{8}g(a_k^{(X)}), \end{aligned} \quad (\text{A}\cdot 14)$$

$$\begin{aligned} \frac{db_k^{(X)}}{dt} = & (r_X + I_X + 1)ka_k^{(X)} \\ & +(r_X + I_X - 1)\frac{k}{2}(a_{k-1}^{(X)} + a_{k+1}^{(X)}) \\ & -\frac{Dk}{8}g(b_k^{(X)}) \end{aligned} \quad (\text{A}\cdot 15)$$

$$\begin{aligned} g(x_k) = & (k-1)x_{k-2} + 2(2k-1)x_{k-1} + 6kx_k \\ & + 2(2k+1)x_{k+1} + (k+1)x_{k+2}, \end{aligned} \quad (\text{A}\cdot 16)$$

$$I_E \equiv I_{EE} - I_{EI}, \quad (\text{A}\cdot 17)$$

$$I_I \equiv I_{IE} - I_{II}, \quad (\text{A}\cdot 18)$$

$$a_0^{(X)} \equiv \frac{1}{\pi}, \quad (\text{A}\cdot 19)$$

$$b_0^{(X)} \equiv 0. \quad (\text{A}\cdot 20)$$

ただし, $X, Y = E$ or I である. a_k^X, b_k^X と (A.11) 式の $I_{XY}(t)$ をまとめてベクトル \mathbf{x} とかくと, 常微分方程式 $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$ が定義でき, これにより系の振舞いを解析することができる。

分岐図の Hopf 分岐と saddle-node 分岐は以下のようにして描くことができる. まず, 常微分方程式 $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$ に対して $\mathbf{f}(\mathbf{x}_s) = 0$ を満たす平衡点 \mathbf{x}_s を Newton 法で見つける. 次に, Jacobian 行列 $D\mathbf{f}(\mathbf{x}_s)$ の固有値を QR 法 [18] で求め, その値を元に分岐線を求める. 一方, homoclinic 分岐や double limit cycle 分岐のような global 分岐は Fokker-Planck 方程式の長時間の振る舞いを見て求める。

最大リアプノフ数は, $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$ に従う 2 つの系を用意し, 2 つの軌道の拡大率を計算することで求めることができる。

3. 横断リアプノフ数の計算方法

今, ベクトル $\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1$ であらわされる 2 モジュール系を考えよう. このベクトルは付録 2. で定義されている. これらのベクトルの平均状態 \mathbf{X} と差 $\Delta\mathbf{x}$ を以下で定義しよう.

$$\mathbf{X} = \frac{\mathbf{x}_0 + \mathbf{x}_1}{2}, \quad (\text{A}\cdot 21)$$

$$\Delta\mathbf{x} = \frac{\mathbf{x}_0 - \mathbf{x}_1}{2}. \quad (\text{A}\cdot 22)$$

2 モジュールが同期している場合 ($\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}_1$), ベクトル \mathbf{X} は不変多様体 $\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}_1$ 上を運動し, ベクトル $\Delta\mathbf{x}$ はそれとは垂直な方向を向く. このとき, 横断リアプノフ指数は以下のように計算できる.

$$\lambda_{\perp} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n\tau} \sum_{j=1}^n \ln \left(\frac{|\Delta\mathbf{x}(t+j\tau)|}{|\Delta\mathbf{x}(t+(j-1)\tau)|} \right). \quad (\text{A}\cdot 23)$$

τ は任意の短い時間である. ただし, このままでは $\Delta\mathbf{x}$ はすぐに大きな値を取ってしまうため, 定期的に $\Delta\mathbf{x}$ の大きさを値 l に規格化する必要がある. X を保つため, 規格化には次式を用いる.

$$\mathbf{x}'_0 = \frac{\mathbf{x}_0 + \mathbf{x}_1}{2} + l \frac{\mathbf{x}_0 - \mathbf{x}_1}{|\mathbf{x}_0 - \mathbf{x}_1|}, \quad (\text{A}\cdot 24)$$

$$\mathbf{x}'_1 = \frac{\mathbf{x}_0 + \mathbf{x}_1}{2} - l \frac{\mathbf{x}_0 - \mathbf{x}_1}{|\mathbf{x}_0 - \mathbf{x}_1|}. \quad (\text{A}\cdot 25)$$

Acknowledgement

本研究の一部は, 文部科学省科学研究補助金 (若手研究 B) 課題番号 14780260 の一環として行われた。

文 献

- [1] G. Matsumoto, K. Aihara, M. Ichikawa, and A. Tasaki, "Periodic and Nonperiodic responses of membrane potentials in squid giant axons during sinusoidal current stimulation," *Journal of Theoretical Neurobiology*, vol.3, pp.1-14, 1984.
- [2] H. Hayashi, S. Ishizuka, M. Ohta, and K. Hirakawa, "Chaotic behavior in the onchidium giant neuron under sinusoidal stimulation," *Physics Letters*, vol.88A, pp.435-438, 1982.
- [3] K. Aihara, T. Takabe, and M. Toyoda, "Chaotic neural networks," *Physics Letters A*, vol.144, pp.333-340, 1990.
- [4] M. Inoue and A. Nagayoshi, "A chaos neuro-computer," *Physics Letters A*, vol.158, pp.373-376, 1991.
- [5] I. Tsuda, "Dynamic link of memory - Chaotic memory map in nonequilibrium neural networks," *Neural Networks*, vol.5, pp.313-326, 1992.
- [6] S. Nara and P. Davis, "Chaotic wandering and search in a cycle-memory neural network," *Progress of Theoretical Physics*, vol.88, pp.845-855, 1992.
- [7] K. Kaneko and I. Tsuda, *Complex Systems: Chaos and beyond, a constructive approach with applications in life sciences*, Springer Verlag, (2000).
- [8] T. Kanamaru and M. Sekine, "Synchronized firings in the networks of class 1 excitable neurons with excitatory and inhibitory connections, and their dependences on the forms of interactions," *Neural Computation*, in submitting, 2004. 最新情報は <http://www.sekine-lab.ei.tuat.ac.jp/~kanamaru/>
- [9] E. Ott and J.C. Sommerer, "Blowout bifurcations: the occurrence of riddled basins and on-off intermittency," *Physics Letters A*, vol.188, pp.39-47, 1994.
- [10] H. Fujisaka and T. Yamada, "Stability theory of synchronized motion in coupled-oscillator systems. IV," *Progress in Theoretical Physics*, vol.75, pp.1087-1104, 1986.
- [11] J.F. Heagy, N. Platt, and S.M. Hammel, "Characterization of on-off intermittency," *Physical Review E*, vol.49, pp.1140-1150, 1994.
- [12] H. Hata and S. Miyazaki, "Exactly solvable maps of on-off intermittency," *Physical Review E*, vol.55, pp.5311-5314, 1997.
- [13] E.M. Izhikevich, "Class 1 neural excitability, conventional synapses, weakly connected networks, and mathematical foundations of pulse-coupled models," *IEEE Transactions on Neural Networks*, vol.10, pp.499-507, 1999.
- [14] E.M. Izhikevich, "Neural excitability, spiking and bursting," *International Journal of Bifurcation and Chaos*, vol.10, pp.1171-1266, 2000.
- [15] Y. Kuramoto, *Chemical oscillations, waves, and turbulence*, Springer, Berlin, 1984.
- [16] W. Gerstner and W. Kistler, *Spiking neuron models*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2002.
- [17] K. Tsumoto, T. Yoshinaga, and H. Kawakami, "Bifurcations of synchronized responses in synaptically coupled Bonhöffer-van der Pol neurons," *Physical Review E*, vol.65, 036230, 2000.
- [18] W.H. Press, B.P. Flannery, S.A. Teukolsky, and W.T. Vetterling, *Numerical Recipes in C*, Cambridge Univ. Press, New York, 1988.