ベクトル解析演習 演習問題 (9) 面積分 (解答編)

担当: 金丸隆志

学籍番号:＿＿＿＿＿＿＿＿ 氏名:＿＿＿＿＿＿＿＿

[問題 1] スカラー関数の面積分 (1)

曲面 S を $x+y+z=2 \quad (0 \leq x \leq 2,\ 0 \leq y \leq 2)$ とする。以下の面積分を求めよ

$$\int_S (x+y)dS$$

(**ヒント**)

まず、曲面を $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(u,v)$ の形に定めなければならない。通常は、$x=u,\ y=v$ とすればよい。すると、S 上では $z=2-x-y=2-u-v$ となるので、$\boldsymbol{r}(u,v)=\begin{pmatrix} u \\ v \\ 2-u-v \end{pmatrix}$ となり、曲面の媒介変数表示が完成する。後は $f=x+y=u+v$ と合わせて公式に代入すれば良い。u、v の積分区間は問題文の条件 $0 \leq x \leq 2,\ 0 \leq y \leq 2$ より定まる。

[問題 1 解説]

曲面の媒介変数表示は $\boldsymbol{r}(u,v)=\begin{pmatrix} u \\ v \\ 2-u-v \end{pmatrix}$ であるから、$\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u}=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$、$\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v}=\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ が得られる。これより外積を計算すると、$\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u}\times\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v}=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$。

よって、$\left|\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u}\times\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v}\right|=\sqrt{1^2+1^2+1^2}=\sqrt{3}$ 。さらに、$f=x+y=u+v$ であるから、公式に代入して

$$\begin{aligned}
\int_S (x+y)dS &= \sqrt{3}\int_0^2\int_0^2 (u+v)\,dudv, \\
&= \sqrt{3}\int_0^2 du\left[uv+\frac{1}{2}v^2\right]_0^2, \\
&= \sqrt{3}\int_0^2 du(2u+2), \\
&= \sqrt{3}\left[u^2+2u\right]_0^2, \\
&= \underline{8\sqrt{3}}
\end{aligned}$$

[問題 2] スカラー関数の面積分 (2)

曲面 S を $x+y+z=2 \quad (x \geq 0,\ y \geq 0,\ z \geq 0)$ とする。以下の面積分を求めよ

$$\int_S (x+y)dS$$

(**ヒント**)

積分区間以外は **[問題 1]** と同じである。条件 $z \geq 0$ をどう使うかであるが、曲面の方程式 $x+y+z=2$ より $z=2-x-y \geq 0$, すなわち、$y \leq 2-x$ がわかる。これと $x \geq 0,\ y \geq 0$ を合わせれば、$0 \leq x \leq 2$、$0 \leq y \leq 2-x$ がわかる (xy 平面で図を描いてみること)。

[問題 2 解説]

ヒントにあるように、積分区間は $0 \leq u \leq 2$、$0 \leq v \leq 2-u$ となる。他は **[問題 1]** と同じであるから、

$$\begin{aligned}
\int_S (x+y)dS &= \sqrt{3}\int_0^2 du\int_2^{2-u} dv\ (u+v), \\
&= \sqrt{3}\int_0^2 du\left[uv+\frac{1}{2}v^2\right]_0^{2-u}, \\
&= \sqrt{3}\int_0^2 du\left(u(2-u)+\frac{1}{2}(2-u)^2\right), \\
&= \sqrt{3}\int_0^2 du\left(-\frac{1}{2}u^2+2\right), \\
&= \sqrt{3}\left[-\frac{1}{6}u^3+2u\right]_0^2, \\
&= \underline{\frac{8}{3}\sqrt{3}}
\end{aligned}$$

[問題 3] ベクトル場の面積分
曲面 S を $x+y+z=2 \quad (0 \leq x \leq 2,\ 0 \leq y \leq 2)$ とする。この曲面におけるベクトル場 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} x \\ -y \\ -z \end{pmatrix}$ の面積分

$$\int_S \boldsymbol{A} \cdot d\boldsymbol{S}$$

を求めよ。

(ヒント)
曲面の媒介変数表示と積分区間とは **[問題 1]** と同じである。 後は $\boldsymbol{A}$ を u, v で表示し、補足編に従い $d\boldsymbol{S}$ を求めて代入し、u, v で積分。

[問題 3 解説]
曲面の媒介変数表示は **[問題 1]** と同じであるから、

$d\boldsymbol{S} = \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v}\, dudv = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} dudv$ となる。さらに、

$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} u \\ -v \\ u+v-2 \end{pmatrix}$ であるから、

$$\boldsymbol{A} \cdot d\boldsymbol{S} = (1 \cdot u + 1 \cdot (-v) + 1 \cdot (u+v-2))dudv = (2u-2)dudv$$

となる。積分区間も **[問題 1]** と同じであるから、

$$\begin{aligned} \int_S \boldsymbol{A} \cdot d\boldsymbol{S} &= \int_0^2 \int_0^2 (2u-2)dudv, \\ &= \int_0^2 du[(2u-2)v]_0^2, \\ &= \int_0^2 du(4u-4), \\ &= \left[2u^2 - 4u\right]_0^2, \\ &= \underline{0} \end{aligned}$$