ベクトル解析演習 演習問題 (8) 線積分と面積分 (補足編)

担当: 金丸隆志

学籍番号: ＿＿＿＿＿＿＿＿ 氏名: ＿＿＿＿＿＿＿＿

[解説 1] 積分再考

線積分と面積分を学ぶに当たり、まずはこれまで学んだ積分を復習しておこう。まず、一次元の積分の解説が図 1 である。積分が「曲線と x 軸に挟まれた領域の符号つきの面積」であることは高校の頃から学んでいることであるが、ここでは、$\int f(x)dx$ を「**(符号つきの) 高さ** $f(x)$ **と微小長さ** dx **の掛け算としての微小面積** $f(x)dx$ **の総和を取ったもの**」として理解することにしよう。すると、dx は微小ではあるが実体のある

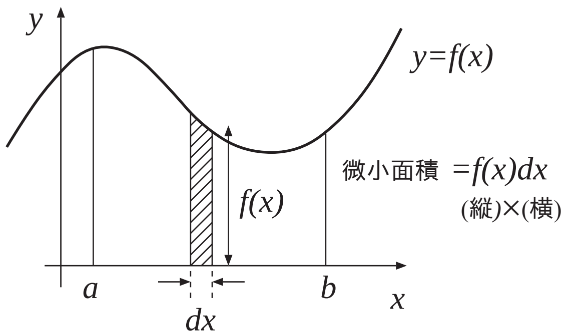

図 1: 積分 $\int_a^b f(x)dx$ の「x 軸に沿った微小面積の和」としての理解

長さとして取り扱われることになり、$\int$ は単に和を取る記号であるということになる。さらに、先回りして言えばこれは x **軸 に沿った** $f(x)$ **の線積分**と見ることも出来る。

同様に、2 次元の積分についても再考しよう。

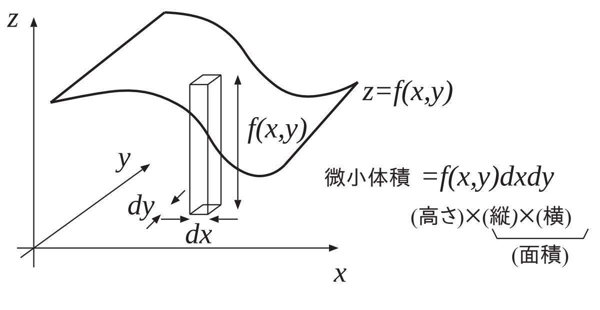

図 2: 積分 $\int\int f(x,y)dxdy$ の「xy 平面に沿った微小体積の和」としての理解

$\int\int f(x,y)dxdy$ は、「**(符号つきの) 高さ** $f(x,y)$ **と微小面積** $dxdy$ **の掛け算としての微小体積**」の総和として理解できる (図 2)。先回りして言えばこれは xy **平面に対する** $f(x,y)$ **の面積分**と見ることも出来る。

最後に、三次元の積分 $\int\int\int \rho(x,y,z)dxdydz$ についてである (図 3)。これは物質の密度 $\rho(x,y,z)$ を積分して物質全体の重さを求める例として解説してある。やはり、物質の密度 $\rho(x,y,z)$ に微小体積 $dxdydz$ を掛けた微小体積 $\rho(x,y,z)dxdydz$ の総和として積分を理解する点がポイントである。

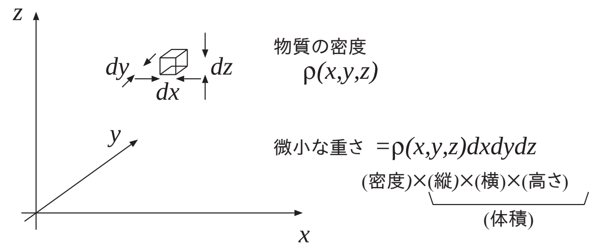

図 3: 積分 $\int\int\int \rho(x,y,z)dxdydz$ の「微小体積の和」としての理解

以上のように、積分を「微小量の総和」として理解できるかどうかが今後の話を理解できるかどうかをわけることになるだろう。

(次のページに続く)

[解説 2] スカラー場の曲線に沿った線積分

[解説 1] にて、「一次元の積分は x 軸に沿った線積分」と述べたが、積分は曲線に沿って行うこともでき、それを線積分という。まず、曲線を $\boldsymbol{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$ と

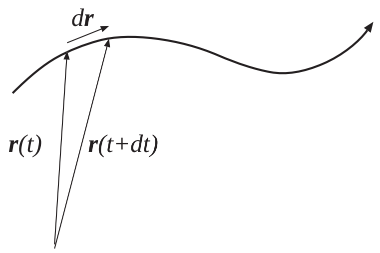

図 4: ベクトル $\boldsymbol{r}(t)$ の微小変化 $d\boldsymbol{r}$

定義しよう。t は**媒介変数**と呼ばれるが、ここではこれまで通り時刻を表すパラメータと思うと理解が容易になるかもしれない。

さらに、t が $a \le t \le b$ の範囲で変化したときの弧の長さ s を

$$s = \int_a^b \left| \frac{d\boldsymbol{r}}{dt} \right| dt \tag{1}$$

で導入する (これは既に演習問題 (4) にて登場済み)。このとき、s の t 微分は

$$\frac{ds}{dt} = \left| \frac{d\boldsymbol{r}}{dt} \right| \tag{2}$$

であり、s の微小量は

$$ds = |d\boldsymbol{r}| \tag{3}$$

となる。図 4 を見ると、$ds = |d\boldsymbol{r}|$ は曲線に沿った長さの微小量であることがわかるだろう。

以上の準備のもと、この曲線に沿ったスカラー場 $\phi(x, y, z)$ の $a \le t \le b$ における線微分は

$$\begin{aligned} \int \phi(x,y,z) ds &= \int_a^b \phi(x(t), y(t), z(t)) \frac{ds}{dt} dt \\ &= \int_a^b \phi(x(t), y(t), z(t)) \left| \frac{d\boldsymbol{r}}{dt} \right| dt \end{aligned} \tag{4}$$

にて定義される。曲線の長さを求める公式 (1) 式は (4) 式で $\phi = 1$ と置いた場合であることもわかる ($\int ds$ は微小長さ ds の総和であり s に等しい)。

[解説 3] ベクトル場の線積分

スカラー場に対する線積分と同様に、ベクトル場 $\boldsymbol{A}(x, y, z) = \begin{pmatrix} A_x(x,y,z) \\ A_y(x,y,z) \\ A_z(x,y,z) \end{pmatrix}$ に対する曲線に沿った線積分

$$\int \boldsymbol{A} \cdot d\boldsymbol{r} = \int_a^b \boldsymbol{A} \cdot \frac{d\boldsymbol{r}}{dt} dt \tag{5}$$

を定義することができる。$\boldsymbol{A} \cdot d\boldsymbol{r}$ や $\boldsymbol{A} \cdot \frac{d\boldsymbol{r}}{dt}$ はベクトル同士の内積であることにも注意して欲しい。$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{F}$ (物体に働く力)、$\boldsymbol{r}$ は物体を動したときにできる曲線とすると、(5) 式は物体に及ぼした仕事 W を表す。

[解説 4] 本日使うかも知れない公式

$F(x)$ が $f(x)$ の原始関数、すなわち $F(x) = \int f(x) dx$ であるとき、置換積分は

$$\int f(g(x)) g'(x) dx = F(g(x)) \tag{6}$$

と書ける。合成関数の微分の逆と思えば良い。

話はとんで、cos の倍角公式はいくつかバリエーションがあって、

$$\begin{aligned} \cos 2\theta &= \cos^2\theta - \sin^2\theta && (7) \\ &= 2\cos^2\theta - 1 && (8) \\ &= 1 - 2\sin^2\theta && (9) \end{aligned}$$

などと書けた。