# ベクトル解析演習 演習問題 (7) ∇、grad、div、rot、△ (解答編)

担当: 金丸隆志

学籍番号: ＿＿＿＿＿＿＿＿ 氏名: ＿＿＿＿＿＿＿＿

**[問題 1] ∇ に関する計算問題**

ベクトル場 $\boldsymbol{A}(x,y,z) = \begin{pmatrix} x^2y^3 \\ 2xy^2z^4 \\ -y^3z^5 \end{pmatrix}$ に対して、grad (div $\boldsymbol{A}$) を計算せよ。すなわち、$\nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{A})$ のことである。

**[問題 1 解説]**

定義通り順番に計算していけば良い。

$$\begin{aligned}\text{div }\boldsymbol{A} &= \frac{\partial}{\partial x}(x^2y^3) + \frac{\partial}{\partial y}(2xy^2z^4) + \frac{\partial}{\partial z}(-y^3z^5),\\ &= 2xy^3 + 4xyz^4 - 5y^3z^4\end{aligned}$$

これに対して grad を適用すると

$$\text{grad (div }\boldsymbol{A}) = \begin{pmatrix} 2y^3 + 4yz^4 \\ 6xy^2 + 4xz^4 - 15y^2z^4 \\ 16xyz^3 - 20y^3z^3 \end{pmatrix}$$

となる。

**[問題 2] ∇ の性質**

(a) ベクトル場 $\boldsymbol{A}(x,y,z) = \begin{pmatrix} xyz \\ -y^2z^3 \\ 2x^2y \end{pmatrix}$ に対して、div (rot $\boldsymbol{A}$) を計算せよ。すなわち、$\nabla\cdot(\nabla\times\boldsymbol{A})$ のことである。

(b) スカラー場 $\phi(x,y,z) = x^2 + \cos(y-z)$ に対して、rot (grad $\phi$) を計算せよ。すなわち、$\nabla\times(\nabla\phi)$ のことである。

**[問題 2 解説]**

(a) 定義通り順番に計算して行けば良い。まず、

$$\text{rot }\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 2x^2 + 3y^2z^2 \\ -3xy \\ -xz \end{pmatrix}$$

が計算される。実はこれは前回計算したものと同じである。このベクトル場に対して div を適用する。

$$\begin{aligned}\text{div (rot }\boldsymbol{A}) &= \frac{\partial}{\partial x}(2x^2 + 3y^2z^2) + \frac{\partial}{\partial y}(-3xy) + \frac{\partial}{\partial z}(-xz),\\ &= 4x - 3x - x = \underline{0}.\end{aligned}$$

実は、**一般に任意のベクトル場 $\boldsymbol{A}(x,y,z)$ に対して div (rot $\boldsymbol{A}$) $= \nabla\cdot(\nabla\times\boldsymbol{A}) = 0$** となることが知られている。

(b) 定義通り順番に計算して行けば良い。まず、

$$\text{grad }\phi = \begin{pmatrix} 2x \\ -\sin(y-z) \\ \sin(y-z) \end{pmatrix}$$

が計算される。これに対して rot を適用すると、$\underline{\text{rot (grad }\phi) = 0}$ となる。実は、**一般に任意のスカラー場 $\phi(x,y,z)$ に対して rot(grad $\phi$) $= \nabla\times(\nabla\phi) = 0$** となることが知られている。

**[問題 3] 調和関数**

スカラー場 $\phi(x,y,z) = \frac{1}{r} = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$ に対して以下の問に答えよ。

(a) $\frac{\partial\phi}{\partial x}$ を計算せよ。

(b) $\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}$ を計算せよ。

(c) $\triangle\phi = 0$ であることを示せ。一般に、$\triangle\phi = 0$ を満たすスカラー場 $\phi$ のことを**調和関数** という。

**[問題 3 解答]**

(a)

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x}\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} &= \frac{\partial}{\partial x}(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{1}{2}}\\ &= -\frac{1}{2}(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{3}{2}}(2x)\\ &= \underline{-x(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{3}{2}}}\end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x}\left(-x(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{3}{2}}\right)\\ &= -(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{3}{2}}\\ &\quad -x\cdot\left(-\frac{3}{2}\right)(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{5}{2}}(2x)\\ &= \underline{-(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{3}{2}} + 3x^2(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{5}{2}}}\end{aligned}$$

(c) (b) の結果をそのまま用いると、

$$\begin{aligned}\triangle\phi &= \frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial z^2}\\ &= -3(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{3}{2}}\\ &\quad +3(x^2+y^2+z^2)(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{5}{2}}\\ &= -3(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{3}{2}} + 3(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{3}{2}}\\ &= \underline{0}.\end{aligned}$$

よって、このスカラー場は調和関数であることが確か
められた。