

ベクトル解析演習 演習問題 (6) スカラー場とベクトル場、 $\nabla$ 、grad、div、rot、 $\Delta$  (解答編)

担当: 金丸隆志

学籍番号:

氏名:

## [問題 1] 発散 (ダイバージェンス)

(a) ベクトル場  $\mathbf{A}(x, y, z) = \begin{pmatrix} 3xyz^2 \\ 2xy^2 \\ -x^2yz \end{pmatrix}$  に対して、発散  $\operatorname{div} \mathbf{A}$  を計算せよ。(b) ベクトル場  $\mathbf{A}(x, y, z) = \begin{pmatrix} xy^2 \\ \log(y^2 + z^2) \\ \sin(xz) \end{pmatrix}$  に対して、発散  $\operatorname{div} \mathbf{A}$  を計算せよ。

## [問題 1 解答]

(a) 偏微分の計算を注意深く行えるかどうかにかかっている。

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \mathbf{A} &= \frac{\partial}{\partial x}(3xyz^2) + \frac{\partial}{\partial y}(2xy^2) + \frac{\partial}{\partial z}(-x^2yz) \\ &= \underline{3yz^2 + 4xy - x^2y} \end{aligned} \quad (1)$$

(b) こちらは偏微分に合成関数の微分も加わりやや難易度が上がっているがクリアして欲しいところ。

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \mathbf{A} &= \frac{\partial}{\partial x}(xy^2) + \frac{\partial}{\partial y}(\log(y^2 + z^2)) + \frac{\partial}{\partial z}(\sin(xz)) \\ &= \underline{y^2 + \frac{2y}{y^2 + z^2} + x \cos(xz)} \end{aligned}$$

## [問題 2] 回転 (ローテーション)

(a) ベクトル場  $\mathbf{A}(x, y, z) = \begin{pmatrix} xyz \\ -y^2z^3 \\ 2x^2y \end{pmatrix}$  に対して、回転  $\operatorname{rot} \mathbf{A}$  を計算せよ。(b) ベクトル場  $\mathbf{A}(x, y, z) = \begin{pmatrix} \frac{x}{x^2 + y^2} \\ -\frac{y}{x^2 + y^2} \\ 0 \end{pmatrix}$  に対して、回転  $\operatorname{rot} \mathbf{A}$  を計算せよ。

## [問題 2 解答]

(a) 公式をそのまま適用するよりは、「 $\nabla$  と  $\mathbf{A}$  の外積」と考えて解くのが容易だろう (数学演習 III の復習)。

$$\mathbf{A}(x, y, z) = \begin{pmatrix} 2x^2 + 3y^2z^2 \\ -3xy \\ -xz \end{pmatrix}$$

(b)

$$\mathbf{A}(x, y, z) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{4xy}{(x^2 + y^2)^2} \end{pmatrix}$$