ベクトル解析演習 演習問題 (5) スカラー場とベクトル場、∇、grad (解答編)

担当: 金丸隆志

学籍番号: ＿＿＿＿＿＿ 氏名: ＿＿＿＿＿＿

[問題 1] 勾配 (グラディエント)

(a) スカラー場 $\phi(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$ に対して、勾配 grad ϕ を計算せよ。

(b) スカラー場 $\phi(x,y,z) = x\log y - x^2z^3$ に対して、勾配 grad ϕ を計算せよ。

[問題 1 解答]

どちらも単なる計算問題である。

(a) 偏微分の定義から、対象変数以外は定数とみなすのだったことに注意すると、$\frac{\partial\phi}{\partial x} = 2x$、$\frac{\partial\phi}{\partial y} = 2y$、$\frac{\partial\phi}{\partial z} = 2z$ であるので、 $\underline{\mathrm{grad}\ \phi = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \\ 2z \end{pmatrix}}$ である。grad ϕ は位置 (x,y,z) を定めるとベクトルが定まるのでベクトル場になっていることに注意。つまり、**スカラー場 ϕ の勾配 grad ϕ はベクトル場になる**のである。

　これをそのまま 3 次元に対して図示するのは難しいので、2 次元の $\phi(x,y) = x^2 + y^2$、grad $\phi = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \end{pmatrix}$ に対して図示してみると、図 1 のようになる。勾配 grad ϕ はスカラー場 ϕ が増加する方向を向くベクトルとなることが読み取れるであろう。

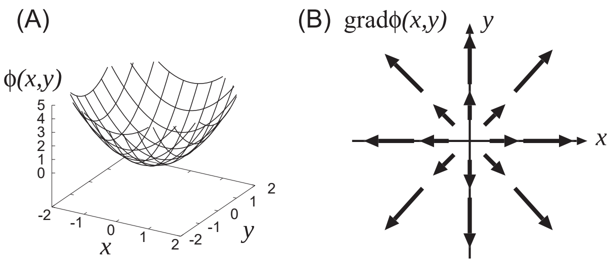

図 1: **[問題 1]** (a) の (A) $\phi(x,y)$、 (B) grad $\phi(x,y)$

(b) こちらはやや計算が面倒であるが、やはり偏微分の計算のみである。$\frac{\partial\phi}{\partial x} = \log y - 2xz^3$、$\frac{\partial\phi}{\partial y} = x/y$、$\frac{\partial\phi}{\partial z} = -3x^2z^2$ であるので、 $\underline{\mathrm{grad}\ \phi = \begin{pmatrix} \log y - 2xz^3 \\ \frac{x}{y} \\ -3x^2z^2 \end{pmatrix}}$。

[問題 2] ポテンシャルと勾配 (グラディエント)

(a) **[補足 3]** にて紹介した万有引力のポテンシャルと力の関係を 3 次元で導こう。今、質量 M の物体が座標原点に存在し、質量 m の物体の位置は $\boldsymbol{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ であるとしよう。ポテンシャル $U = -GMm/r$ において、r は 2 物体間の距離であるから、$r \equiv |\boldsymbol{r}| = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$ と書くことができる。すなわち、(x,y,z) におけるポテンシャルはスカラー場

$$\phi(x,y,z) = -\frac{GMm}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \tag{1}$$

で表すことができる。(1) 式に対して補足編の (3) 式を適用して、物体に働く力のベクトル場 $\boldsymbol{F}$ を x、y、z を用いて表せ。

(b) (a) で得た解に対し、$r \equiv |\boldsymbol{r}| = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$ および $\boldsymbol{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ を用いて $\boldsymbol{F}$ を表せ (x、y、z を用いずに、ということ)。

　その際、$\boldsymbol{r}/r$ をひとまとめにすると、補足編の (2) 式との対応が分かりやすいはずである。注意して考えると、$\boldsymbol{r}/r$ は「$\boldsymbol{r}$ の方向を向き、長さが 1 であるベクトル」であることがわかる。

[問題 2 解答]

偏微分計算ができるかどうか、そして符号に注意することがポイントである。まず $\nabla\phi$ の x 成分を考える。

$$\begin{aligned}
(\nabla\phi \text{の } x \text{ 成分}) &= \frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{GMm}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right) \\
&= -GMm\frac{\partial}{\partial x}(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{1}{2}} \\
&= \frac{GMm}{2}(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{3}{2}}\cdot(2x) \\
&= \frac{GMmx}{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)^3}} \qquad (2)
\end{aligned}$$

y 成分、z 成分は (2) 式の分子の x がそれぞれ y、z になるだけである。よって、

$$\underline{\boldsymbol{F} = -\nabla\phi = \begin{pmatrix} -\frac{GMmx}{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)^3}} \\ -\frac{GMmy}{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)^3}} \\ -\frac{GMmz}{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)^3}} \end{pmatrix}}$$

となる。

(b) 共通項を括り出せば

$$\boldsymbol{F} = -\frac{GMm}{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)^3}} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

と書けるので、

$$\underline{\boldsymbol{F} = -\frac{GMm\boldsymbol{r}}{r^3}}$$

となる。なお、問題文にあるように

$$\boldsymbol{F} = -\frac{GMm}{r^2} \cdot \frac{\boldsymbol{r}}{r}$$

と書き直せば、補足編の (2) 式との類似性は明らかであろう。「$-GMm/r^2$」がベクトルの大きさを表し、「$\boldsymbol{r}/r$ (長さ 1)」がベクトルの向きを表すというわけである。