ベクトル解析演習 演習問題 (2) 外積の性質 (解答編)

担当: 金丸隆志

学籍番号:＿＿＿＿＿＿＿＿ 氏名:＿＿＿＿＿＿＿＿

[問題 1] 外積のさまざまな性質

$\boldsymbol{i}$、$\boldsymbol{j}$、$\boldsymbol{k}$ をそれぞれ x、y、z 軸の基本ベクトルとする。以下の問に答えよ。

(a) $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{b}$ を簡単にせよ。$\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{b}$ はさらに簡単にできることに注意せよ。

(b) $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{i}-2\boldsymbol{j}-\boldsymbol{k}$、$\boldsymbol{b}=2\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}-3\boldsymbol{k}$ であるとき、$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{b}$ を $\boldsymbol{i}$、$\boldsymbol{j}$、$\boldsymbol{k}$ を用いて表せ。

(c) (b) の $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$ に対し、$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\times(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})$ を $\boldsymbol{i}$、$\boldsymbol{j}$、$\boldsymbol{k}$ を用いて表せ。

(d) (b) の $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$ に対し、$\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$ を 2 辺とする平行四辺形の面積を求めよ。

(e) (b) の $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$ に対し、$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ が $\boldsymbol{a}$ とも $\boldsymbol{b}$ とも垂直になることを確かめよ。つまり、$\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})$ と $\boldsymbol{b}\cdot(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})$ を計算した値が 0 になることを確かめればよい。

[問題 1 解答]

(a) **[補足 1]** の公式 $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}+\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}$ が使えるため $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{b}$ が得られるが、**[補足 1]** により $\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{b}=0$ となる。**安易に $\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}^2$ などと考えないこと！**よって $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{b}=\underline{\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}}$

(b) (a) より $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ を計算すれば良いことがわかるが、成分で考えれば $\boldsymbol{a}=\begin{pmatrix}1\\-2\\-1\end{pmatrix}$、$\boldsymbol{b}=\begin{pmatrix}2\\-1\\-3\end{pmatrix}$ であり、前回の公式が使える (その方法は省略)。ここでは **[解説 1]** に基づいた別解で求めてみよう。

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b} &= (\boldsymbol{i}-2\boldsymbol{j}-\boldsymbol{k})\times(2\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}-3\boldsymbol{k}) && (1)\\
&= 2\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{i}-\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{j}-3\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{k}\\
&\quad -4\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{j}+6\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{k}\\
&\quad -2\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{i}+\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{j}+3\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{k} && (2)\\
&= -\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{j}+3\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{i}\\
&\quad +4\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{j}+6\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{k}\\
&\quad -2\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{k} && (3)\\
&= -\boldsymbol{k}+3\boldsymbol{j}\\
&\quad +4\boldsymbol{k}+6\boldsymbol{i}\\
&\quad -2\boldsymbol{j}-\boldsymbol{i} && (4)\\
&= \underline{5\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}+3\boldsymbol{k}}
\end{aligned}$$

以上で答えが求められた。(1) 式から (2) 式では展開を行っているが、**[補足 1]** にあるように、外積演算 ($\times$) の**順序を変えない**よう注意しなければならない。(2) 式から (3) 式では公式 $\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a}=-\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ を用いて外積の順序が $\boldsymbol{i}\to\boldsymbol{j}\to\boldsymbol{k}\to\boldsymbol{i}$ となるよう整理している。さらに $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{a}=0$ も用いた。(3) 式から (4) 式では $\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{j}=\boldsymbol{k}$ などを用いた。成分計算で求めた者が多いかも知れないが、答えが等しくなることを確認しておこう。

(c) 展開公式 $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}+\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}$ と $\boldsymbol{c}\times(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a}+\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{b}$ を用いて整理すれば良い。

$$\begin{aligned}
(\text{与式}) &= \boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})+\boldsymbol{b}\times(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})\\
&= \boldsymbol{a}\times\boldsymbol{a}-\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{b}\\
&= -\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a}\\
&= -\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}\\
&= -2\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}
\end{aligned}$$

ここで、$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{a}=0$ や $\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a}=-\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ を用いたことに注意。$-2\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ は (b) で求めたものを -2 倍すればよいのだから、$\underline{-10\boldsymbol{i}-2\boldsymbol{j}-6\boldsymbol{k}}$

(d) 定義より $|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|$ が求める面積である。(b) より $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=5\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}+3\boldsymbol{k}$ だったから、

$$\begin{aligned}
|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}| &= |5\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}+3\boldsymbol{k}|\\
&= \sqrt{5^2+1^2+3^2}=\underline{\sqrt{35}}
\end{aligned}$$

(e) $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{i}-2\boldsymbol{j}-\boldsymbol{k}$、$\boldsymbol{b}=2\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}-3\boldsymbol{k}$、$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=5\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}+3\boldsymbol{k}$ であったことに注意すると、

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}) &= (\boldsymbol{i}-2\boldsymbol{j}-\boldsymbol{k})\cdot(5\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}+3\boldsymbol{k})\\
&= 5-2-3=0\\
\boldsymbol{b}\cdot(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}) &= (2\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}-3\boldsymbol{k})\cdot(5\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}+3\boldsymbol{k})\\
&= 10-1-9=0
\end{aligned}$$

よって、どちらも 0 になることが確かめられた。

[問題 2] スカラー三重積とベクトル三重積

$\boldsymbol{a}=\begin{pmatrix}1\\-2\\-3\end{pmatrix}$、$\boldsymbol{b}=\begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix}$、$\boldsymbol{c}=\begin{pmatrix}1\\3\\-2\end{pmatrix}$ に対して、以下を計算せよ。

(a) スカラー三重積 $\boldsymbol{a} \cdot (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c})$
(b) ベクトル三重積 $\boldsymbol{a} \times (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c})$

[問題 2 解答]
これは定義に従って計算するだけである。まず、前回学んだ成分計算により $\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$ をあらかじめ求めておく。

(a) $\boldsymbol{a} \cdot (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}) = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} = 1 - 6 - 15 = \underline{-20}$

(b) $\boldsymbol{a} \times (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}) = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} = \underline{\begin{pmatrix} -1 \\ -8 \\ 5 \end{pmatrix}}$
(前回学んだ成分計算)