ベクトル解析演習 演習問題 (2) 外積の性質 (補足編)

担当: 金丸隆志

学籍番号: ＿＿＿＿＿＿＿＿ 氏名: ＿＿＿＿＿＿＿＿

[補足 1] 外積のさまざまな性質

外積に関して知っておくべき公式をまとめると以下の通り。

- $\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}) = \boldsymbol{b}\cdot(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}) = 0$
  これは「**ベクトル $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ は $\boldsymbol{a}$ とも $\boldsymbol{b}$ とも垂直**」と理解できる。式そのものより意味で覚えよう。
- $\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a} = -\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$　前回に既出。
- $|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}| = |\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\sin\theta$　($|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|$ は $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ を 2 辺とする平行四辺形の面積) 内積では $\cos\theta$ だったことに注意。
- $\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{j} = \boldsymbol{k}$、$\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{k} = \boldsymbol{i}$、$\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{i} = \boldsymbol{j}$
  これらも意味で覚えよう。成分で確かめることもできる。また、順番にも注意。順番が変わると以下のようになる。
  $\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{i} = -\boldsymbol{k}$、$\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{j} = -\boldsymbol{i}$、$\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{k} = -\boldsymbol{j}$
- $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{a} = 0$
  これは、$\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{a}$ (同一ベクトル) の成す角が $\theta = 0$ であり、それらが作る平行四辺形の面積が 0 になると考えれば明らか。これも意味で覚えよう。
- $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{c} = \boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}+\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}$
- $\boldsymbol{c}\times(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}) = \boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a}+\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{b}$
- $(p\boldsymbol{a})\times\boldsymbol{b} = p(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})$
- $\boldsymbol{a}\times(p\boldsymbol{b}) = p(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})$

[補足 2] スカラー三重積とベクトル三重積

スカラー三重積とベクトル三重積について知っておくべきことをまとめると以下の通り。

- $\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})$ を**スカラー三重積** と言う (これは [**補足 1**]) の展開公式には含まれておらず、**これを展開することはできない**ことに注意)。
- $\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})$ は $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{c}$ が作る平行 6 面体の体積を表すスカラー量である (ただし、正負の値を取り得る)。
- $\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}) > 0$ のとき、$\{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}\}$ は右手系をなす、という。逆に $\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}) < 0$ のとき $\{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}\}$ は左手系をなす、という。
- $\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}) = \boldsymbol{b}\cdot(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a}) = \boldsymbol{c}\cdot(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})$
  順序に注意。順序が異なると以下のようになる (これは外積の性質)。
  $\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{b}) = -\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})$
- $\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}) \neq 0$ のとき、ベクトル $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{c}$ は一次独立である。
- $\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})$ を**ベクトル三重積** と言う (これも [**解説 1**]) の展開公式には含まれておらず、展開することはできない)。**外積なのでこの結果はベクトルとなる**。

[補足 3] 外積の例

物理学 (力学) において、力 $\boldsymbol{F}$ が物体を変位 $\boldsymbol{r}$ だけ動かすときになす仕事が $W = \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{r}$ のように内積で表されることを前回学んだ。外積は力学においては**角運動量 (回転モーメント)** $\boldsymbol{r} \times m\boldsymbol{v}$ や**力のモーメント** $\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{F}$ として登場する。質量 m、位置 $\boldsymbol{r}$ の物体に力 $\boldsymbol{F}$ が働いているとき、この物体の角運動量 (回転モーメント) の時間変化は

$$\frac{d}{dt}(\boldsymbol{r} \times m\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{F} \tag{1}$$

のように書き表すことができる。この式は剛体の回転運動に対しては、慣性モーメント I を用いて

$$I\frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} = \sum_i \boldsymbol{r_i} \times \boldsymbol{F_i} \tag{2}$$

と書き直すことができる。

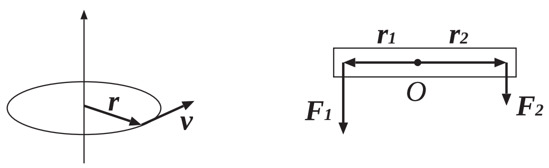

図 1: 回転運動の模式図