ベクトル解析演習 演習問題 (1) ベクトル解析の基礎〜ベクトル・内積・外積〜 (解答編)

担当: 金丸隆志

学籍番号: ＿＿＿＿＿＿＿＿ 氏名: ＿＿＿＿＿＿＿＿

[問題 1] ベクトルの和とスカラー倍

$\boldsymbol{i}$、$\boldsymbol{j}$、$\boldsymbol{k}$ をそれぞれ x、y、z 軸の基本ベクトルとし、さらにベクトル $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$ を $\boldsymbol{a} = 2\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}-5\boldsymbol{k}$、$\boldsymbol{b} = 4\boldsymbol{i}-3\boldsymbol{j}+2\boldsymbol{k}$ で定める。以下の問に答えよ。なお、ベクトルは全て列ベクトルで表すものとする。

(a) $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$ を成分表示せよ。

(b) $3\boldsymbol{a} - 2\boldsymbol{b}$ を $\boldsymbol{i}$、$\boldsymbol{j}$、$\boldsymbol{k}$ を用いて表し、さらに成分表示せよ。

(c) $|\boldsymbol{a} + 2\boldsymbol{b}|$ を求めよ。

[問題 1 解答]

(a) 基本ベクトルの定義より、$\boldsymbol{i} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$、$\boldsymbol{j} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$、$\boldsymbol{k} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ であるから、$\underline{\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix}}$。同様に $\underline{\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}}$。

(b) 分配法則を使って計算できる。

$$\begin{aligned} 3\boldsymbol{a} - 2\boldsymbol{b} &= 3(2\boldsymbol{i} + \boldsymbol{j} - 5\boldsymbol{k}) - 2(4\boldsymbol{i} - 3\boldsymbol{j} + 2\boldsymbol{k}) \\ &= 6\boldsymbol{i} + 3\boldsymbol{j} - 15\boldsymbol{k} - 8\boldsymbol{i} + 6\boldsymbol{j} - 4\boldsymbol{k} \\ &= \underline{-2\boldsymbol{i} + 9\boldsymbol{j} - 19\boldsymbol{k}} \end{aligned}$$

よって成分は $-2\boldsymbol{i} + 9\boldsymbol{j} - 19\boldsymbol{k} = \underline{\begin{pmatrix} -2 \\ 9 \\ -19 \end{pmatrix}}$

(c) まず $\boldsymbol{a} + 2\boldsymbol{b}$ の成分を求めると、

$$\begin{aligned} \boldsymbol{a} + 2\boldsymbol{b} &= (2\boldsymbol{i} + \boldsymbol{j} - 5\boldsymbol{k}) + 2(4\boldsymbol{i} - 3\boldsymbol{j} + 2\boldsymbol{k}) \\ & 10\boldsymbol{i} - 5\boldsymbol{j} - \boldsymbol{k} \end{aligned}$$

より、$\begin{pmatrix} 10 \\ -5 \\ -1 \end{pmatrix}$ となる。よって、

$$\begin{aligned} |\boldsymbol{a} + 2\boldsymbol{b}| &= \sqrt{10^2 + (-5)^2 + (-1)^2} \\ &= \sqrt{126} = \underline{3\sqrt{14}} \end{aligned}$$

[問題 2] ベクトルの内積

(a) $\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 3 \end{pmatrix}$、$\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ -6 \\ -4 \end{pmatrix}$ の内積 $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}$ を計算せよ。

(b) $\boldsymbol{a} = 3\boldsymbol{i} + 5\boldsymbol{j} - \boldsymbol{k}$、$\boldsymbol{b} = 2\boldsymbol{i} - \boldsymbol{j} + 3\boldsymbol{k}$ の内積 $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}$ を計算せよ。

[問題 2 解答]

(a) 定義通りに計算すれば良い。

$$\begin{aligned} \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} &= 2 \cdot 1 + (-5) \cdot (-6) + 3 \cdot (-4) \\ &= 2 + 30 - 12 = \underline{20} \end{aligned}$$

(b) 成分を求めてから定義通りに計算しても良いのだが、ここでは別の解法を用いてみよう。

$$\begin{aligned} \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} &= (3\boldsymbol{i} + 5\boldsymbol{j} - \boldsymbol{k}) \cdot (2\boldsymbol{i} - \boldsymbol{j} + 3\boldsymbol{k}) \\ &= 6|\boldsymbol{i}|^2 - 3\boldsymbol{i} \cdot \boldsymbol{j} + 9\boldsymbol{i} \cdot \boldsymbol{k} \\ & \quad +10\boldsymbol{j} \cdot \boldsymbol{i} - 5|\boldsymbol{j}|^2 + 15\boldsymbol{j} \cdot \boldsymbol{k} \\ & \quad -2\boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{i} + \boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{j} - 3|\boldsymbol{k}|^2 \qquad (1) \\ &= 6 - 5 - 3 = \underline{-2} \qquad (2) \end{aligned}$$

ここで、(1) 式から (2) 式への計算では $|\boldsymbol{i}| = |\boldsymbol{j}| = |\boldsymbol{k}| = 1$ (**基本ベクトルの長さは 1**) および $\boldsymbol{i} \cdot \boldsymbol{j} = \boldsymbol{j} \cdot \boldsymbol{k} = \boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{i} = 0$ (**異なる基本ベクトルは互いに直交**) などを用いた。これらは公式として覚えるというよりは、基本ベクトルの性質から自然と頭に浮かぶことが望ましい。

[問題 3] ベクトルの外積

ベクトル $\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ -2 \end{pmatrix}$ および $\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$ に対して以下を計算せよ。

(a) $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$ (b) $\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{a}$

同様に、ベクトル $\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix}$ および $\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 8 \\ -5 \end{pmatrix}$ に対しても以下を計算せよ。

(c) $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$ (d) $\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{a}$

[問題 3 解答]

解説をもとに計算をすればよい。

(a) $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 6 \\ -5 \\ 13 \end{pmatrix}$,　　(b) $\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} -6 \\ 5 \\ -13 \end{pmatrix}$

(c) $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$,　　(d) $\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} -4 \\ -1 \\ -4 \end{pmatrix}$

ここで、$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$ と $\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{a}$ が等しくならない点が重要である。詳しく言うと $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = -\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{a}$ であるが、これは (補足編) 図 2 において「$\boldsymbol{a}$ から $\boldsymbol{b}$ へ右ネジを回す」のと「$\boldsymbol{b}$ から $\boldsymbol{a}$ へ右ネジを回す」のとではネジの進む向きが逆転する、ということに対応している。

　外積の意味については次回さらに詳しく学ぶ。