資料 定数係数２階線形微分方程式

担当: 金丸隆志

1 基本形

1.1 問題の枠組み

以下の微分方程式を定数係数の 2 階斉次線形微分方程式という。ただし、p と q は実数の定数である。$p=0$、$q>0$ の場合は皆さんご存知の単振動となる。

$$\frac{d^2x}{dt^2}+p\frac{dx}{dt}+qx=0 \tag{1}$$

先回りして言うと、この微分方程式の解の性質は、特性方程式と呼ばれる以下の 2 次方程式がどのような解を持つかで変化する。

$$\lambda^2+p\lambda+q=0 \tag{2}$$

すなわち、判別式

$$D=p^2-4q \tag{3}$$

の正負により解の性質が変化するということである。以下で具体的に見ていこう。

1.2 特性方程式が 2 つの異なる実数解を持つ場合 ($D=p^2-4q>0$ の場合)

特性方程式が 2 つの異なる実数解を持つ場合、それらを α、β として微分方程式は以下のように書き直せる。

$$\frac{d^2x}{dt^2}-(\alpha+\beta)\frac{dx}{dt}+\alpha\beta x=0 \tag{4}$$

[解法 Step 1]
$x=e^{\lambda t}$ (λ は定数) の形の解を仮定しよう。$x=e^{\lambda t}$ を t で微分すると、$x'=\lambda e^{\lambda t}$ および $x''=\lambda^2e^{\lambda t}$ が得られるので、これを問題の微分方程式 (4) に代入すると、

$$\begin{aligned}\lambda^2e^{\lambda t}-(\alpha+\beta)\lambda e^{\lambda t}+\alpha\beta e^{\lambda t} &= 0\\ (\lambda^2-(\alpha+\beta)\lambda+\alpha\beta)e^{\lambda t} &= 0\end{aligned}$$

ここで、$e^{\lambda t}>0$ は 0 には成り得ないので、$\lambda^2-(\alpha+\beta)\lambda+\alpha\beta=0$ となるが、これは λ に関する 2 次方程式である。これを解くと

$$\begin{aligned}\lambda^2-(\alpha+\beta)\lambda+\alpha\beta &= 0\\ (\lambda-\alpha)(\lambda-\beta) &= 0\\ \lambda &= \alpha,\beta\end{aligned}$$

よって、$x=e^{\alpha t}$ と $x=e^{\beta t}$ はともに問題の微分方程式 (4) の解であることがわかった。なお、上の 2 次方程式 $\lambda^2-(\alpha+\beta)\lambda+\alpha\beta=0$ のことを**特性方程式**という。

[解法 Step 2]
次に、2 つの任意定数 C_1 と C_2 を用いた線形和 $x=C_1e^{\alpha t}+C_2e^{\beta t}$ も問題の微分方程式 (4) の解であることを示そう。いま、x の一階微分と二階微分をあらかじめ計算しておくと、

$$\begin{aligned}x' &= \alpha C_1e^{\alpha t}+\beta C_2e^{\beta t},\\ x'' &= \alpha^2C_1e^{\alpha t}+\beta^2C_2e^{\beta t},\end{aligned}$$

となるから、これを問題の微分方程式 (4) の左辺に代入すると、

$$\begin{aligned}
(\text{左辺}) &= \alpha^2 C_1 e^{\alpha t} + \beta^2 C_2 e^{\beta t} \\
&\quad -(\alpha+\beta)(\alpha C_1 e^{\alpha t} + \beta C_2 e^{\beta t}) \\
&\quad \alpha\beta(C_1 e^{\alpha t} + C_2 e^{\beta t}) \\
&= (\alpha^2 - (\alpha+\beta)\alpha + \alpha\beta) C_1 e^{\alpha t} \\
&\quad +(\beta^2 - (\alpha+\beta)\beta + \alpha\beta) C_2 e^{\beta t} \\
&= 0 = (\text{右辺})
\end{aligned}$$

よって問題の微分方程式 (4) が満たされることがわかった。
[解法 Step 3]
よって、問題の微分方程式の**一般解**は$\underline{x = C_1 e^{\alpha t} + C_2 e^{\beta t}}$ である。

[解法に関するコメント]
ここではフォーマルな形で書いたが、一般的にこのような問題が出たときの解答は **[解法 Step 1]** → **[解法 Step 3]** と進めば良い。**[解法 Step 2]** は一度は計算してみて欲しいが、何度かやればからくりがわかるはず。
なお、一般に、2 階の微分方程式の一般解には、2 つの任意定数 (ここでは C_1, C_2) が存在することに注意して欲しい。前回扱った 1 階線形微分方程式は任意定数は一つであったことにも注意 ($x = Ae^{-t}$ の A のように)。

1.3 特性方程式が 2 複素数解を持つ場合 ($D = p^2 - 4q < 0$ の場合)

次に、特性方程式が二つの複素数解をもつ場合、すなわち $\alpha, \beta = \gamma \pm i\omega$ と書ける場合を考える (γ, ω は実数, i は虚数単位)。その場合も解は $x = C_1 e^{(\gamma+i\omega)t} + C_2 e^{(\gamma-i\omega)t}$ と書ける。これで数学的に間違いではないが、これでは解答の意味がわかりにくい。なぜかというと、物理や工学などでは、解答として実数を求めることが多いが、$e^{(\gamma\pm i\omega)t}$ はそのままでは複素数であり、解のイメージを掴みにくいためである。
これをどのように変形すべきかを以下で述べる。まず、指数関数の性質を用いて

$$\begin{aligned}
x &= C_1 e^{(\gamma+i\omega)t} + C_2 e^{(\gamma-i\omega)t} \\
&= C_1 e^{\gamma t} e^{i\omega t} + C_2 e^{\gamma t} e^{-i\omega t} \\
&= e^{\gamma t}(C_1 e^{i\omega t} + C_2 e^{-i\omega t})
\end{aligned}$$

と変形できる。指数関数の変形ができない学生が多いが、ここでつまずかないこと。
次に、括弧内の変形に移るが、ここでオイラーの公式 $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$ を用いる。

$$\begin{aligned}
x &= e^{\gamma t}(C_1 e^{i\omega t} + C_2 e^{-i\omega t}) \\
&= e^{\gamma t}(C_1(\cos\omega t + i\sin\omega t) + C_2(\cos\omega t - i\sin\omega t))
\end{aligned}$$

最後の式の変形には $\sin(-\theta) = -\sin\theta$ を用いていることに注意。さらに計算を続ければ

$$\begin{aligned}
x &= e^{\gamma t}((C_1 + C_2)\cos\omega t + i(C_1 - C_2)\sin\omega t) \\
&= e^{\gamma t}(A\cos\omega t + B\sin\omega t)
\end{aligned}$$

ここで、新たな任意定数 $A = C_1 + C_2$、 $B = i(C_1 - C_2)$ を定義した。この形、すなわち
$\underline{x = e^{\gamma t}(A\cos\omega t + B\sin\omega t)}$ (A, B は任意定数) が正式な解である。
さらに、三角関数の性質として、$A\cos\omega t + B\sin\omega t$ は $K_1\cos(\omega t + \phi_1)$ や $K_2\cos(\omega t + \phi_2)$ などとも書けるので、$\underline{x = K_1 e^{\gamma t}\cos(\omega t + \phi_1)}$ (K_1, ϕ_1 は任意定数) や $\underline{x = K_2 e^{\gamma t}\sin(\omega t + \phi_2)}$ (K_2, ϕ_2 は任意定数) でも正しい解である。

ちなみに、$A\cos\omega t + B\sin\omega t$ が $K_1\cos(\omega t+\phi_1)$ と書けることも示しておこう。$K_1\cos(\omega t+\phi_1)$ を加法定理を用いて分解して

$$
\begin{aligned}
K_1\cos(\omega t+\phi_1) &= K_1\cos\omega t\cos\phi_1 - K_1\sin\omega t\sin\phi_1 \\
&\quad (K_1\cos\phi_1)\cos\omega t - (K_1\sin\phi_1)\sin\omega t \\
&\quad A\cos\omega t + B\sin\omega t
\end{aligned}
$$

と書ける。ただし、$A = K_1\cos\phi_1$, $B = -K_1\sin\phi_1$ とした。

[覚えておくと便利なこと]

上で学んだことをまとめると、特性方程式の解が複素数である場合の問題を解く場合、以下の 4 つの形式が数学的に等価であることを覚えておくと、問題を解くのがスムーズになる。

- $C_1 e^{i\omega t} + C_2 e^{-i\omega t}$
- $A\cos\omega t + B\sin\omega t$
- $K_1\cos(\omega t+\phi_1)$
- $K_2\sin(\omega t+\phi_2)$

ただし、C_1, C_2, A, B, K_1, ϕ_1, K_2, ϕ_2 は全て任意定数。

なお、「丸暗記」というよりは、忘れたときにオイラーの公式や加法定理を用いて自分で導き出せる、という意味で覚えておく、ということである。

1.4 特性方程式が重解を持つ場合 ($D = p^2 - 4q = 0$ の場合)

さて、特性方程式が重解を持つ場合、微分方程式は以下のように書ける。ただし、α は実数定数である。

$$
\frac{d^2x}{dt^2} - 2\alpha\frac{dx}{dt} + \alpha^2 x = 0 \tag{5}
$$

[解法 Step 1]

$x = e^{\lambda t}$ (λ は定数) の形の解を仮定しよう。$x = e^{\lambda t}$ を t で微分すると、$x' = \lambda e^{\lambda t}$ および $x'' = \lambda^2 e^{\lambda t}$ が得られるので、これを問題の微分方程式 (5) に代入すると、

$$
\begin{aligned}
\lambda^2 e^{\lambda t} - 2\alpha\lambda e^{\lambda t} + \alpha^2 e^{\lambda t} &= 0 \\
(\lambda^2 - 2\alpha\lambda + \alpha^2)e^{\lambda t} &= 0
\end{aligned}
$$

ここで、$e^{\lambda t} > 0$ は 0 には成り得ないので、$\lambda^2 - 2\alpha\lambda + \alpha^2 = 0$ となるが、これが前回登場した特性方程式である。これを解くと

$$
\begin{aligned}
(\lambda-\alpha)^2 &= 0 \\
\lambda &= \alpha \text{ (重解)}
\end{aligned}
$$

よって、$x = e^{\alpha t}$ が問題の微分方程式 (5) の解であることがわかった。

[解法 Step 2]

2 つの異なる解 $x = e^{\alpha t}$, $e^{\beta t}$ が存在した場合は、2 つの任意定数 C_1 と C_2 を用いた線形和 $x = C_1 e^{\alpha t} + C_2 e^{\beta t}$ を問題の微分方程式 (5) の一般解とすることができたが、今回は $x = e^{\alpha t}$ しかないのでそれができない。ではどうするか、というのがこのケースのポイント。

方針はもう一つの解を発見的な方法で見つけて

$$
x = C_1 e^{\alpha t} + C_2(\text{もう一つの解})
$$

とする、というものである。今回のように特性方程式が重解になる場合はほとんどパターン化しており、「もう一つの解」として $te^{\alpha t}$ を仮定して話を進めることになる。

[解法 Step 3]

もう一つの解として $x = te^{\alpha t}$ を仮定し、この $x(t)$ が問題の微分方程式 (5) を満たすことを確認する。あらかじめ 1 階微分と 2 階微分を計算しておくと、

$$\begin{aligned} x' &= e^{\alpha t} + \alpha te^{\alpha t} \\ x'' &= \alpha e^{\alpha t} + \alpha e^{\alpha t} + \alpha^2 te^{\alpha t} \end{aligned}$$

となる。積の微分 $(fg)' = f'g + fg'$ を使っていることに注意。これを問題の微分方程式 (5) の左辺に代入すると、

$$\begin{aligned} (\text{左辺}) &= (\alpha e^{\alpha t} + \alpha e^{\alpha t} + \alpha^2 te^{\alpha t}) \\ &\quad -2\alpha(e^{\alpha t} + \alpha te^{\alpha t}) + \alpha^2 te^{\alpha t} \\ &= (2\alpha + \alpha^2 t - 2\alpha - 2\alpha^2 t + \alpha^2 t)e^{\alpha t} \\ &= 0 = (\text{右辺}) \end{aligned}$$

よって問題の微分方程式 (5) が満たされることがわかった。すなわち、 $x = te^{\alpha t}$ も問題の微分方程式 (5) の解の一つである。

[解法 Step 4]

以上から、問題の微分方程式の**一般解**は

$$x = C_1 e^{\alpha t} + C_2 te^{\alpha t} = \underline{(C_1 + C_2 t)e^{\alpha t}}$$

[解法に関するコメント]

この問題の一般的な解答は、**[解法 Step 1]** → **[解法 Step 3]** → **[解法 Step 4]** と進む。

2 定数入力が加わった場合

本資料でこれまでに登場した微分方程式の右辺に、定数入力が加わった場合、すなわち

$$\frac{d^2x}{dt^2} + p\frac{dx}{dt} + qx = K \tag{6}$$

を考える。ここで、$X = x - K/q$ を定義すると、$X'' = x''$, $X' = x'$ より X は

$$\frac{d^2X}{dt^2} + p\frac{dX}{dt} + qX = 0$$

を満たす。これは前章で取り扱った微分方程式である。よって、x の解の形に戻すと p, q の値に応じて

$$\begin{aligned} x &= \frac{K}{q} + C_1 e^{\alpha t} + C_2 e^{\beta t} \\ x &= \frac{K}{q} + e^{\gamma t}(A\cos\omega t + B\sin\omega t) \\ x &= \frac{K}{q} + (C_1 + C_2 t)e^{\alpha t} \end{aligned}$$

などとなる。

3 時間に依存する入力が加わった場合

3.1 前提

ここでは以下の形式の微分方程式を解く。

$$\frac{d^2x}{dt^2} + p\frac{dx}{dt} + qx = f(t) \tag{7}$$

右辺を $f(t) = 0$ とすれば、これはここまでで学んできた **2 階斉次線形微分方程式**に他ならない。$f(t) \neq 0$ の場合を **2 階非斉次線形微分方程式**と呼ぶ。この解法として**未定係数法**と**定数変化法**が知られているが、本資料では計算量の少ない**未定係数法**を紹介する。

[**未定係数法 Step 1**]

$f(t) = 0$ とし、斉次微分方程式をあらかじめ解いておく。一般的に書けば $x_{\text{斉次}}(t) = C_1g_1(t) + C_2g_2(t)$ となるのだった (特性方程式の解によって、$g_1(t)$, $g_2(t)$ は指数関数や三角関数になる)。

[**未定係数法 Step 2**]

$f(t) \neq 0$ の**非斉次**微分方程式 (7) 式を満たす解を一つ見つける。これを**特殊解**といい、$x_{\text{特殊}}(t)$ と書く。どのように見つけるのかは問題による (後述) が、このステップが今回のポイントとなる。

[**未定係数法 Step 3**]

$x_{\text{斉次}}(t)$ と $x_{\text{特殊}}(t)$ とを足し合わせた

$\underline{x(t) = x_{\text{特殊}}(t) + x_{\text{斉次}}(t)}$ が求める一般解である。

これだけではわかりにくいので、以下で具体的な例を用いて解説する。

3.2 指数関数入力 (1)

以下の微分方程式を解け。ただし、α, β, γ は $\alpha \neq \beta$, $\gamma \neq \alpha$, $\gamma \neq \beta$ を満たす実数定数であるとする。

$$\frac{d^2x}{dt^2} - (\alpha+\beta)\frac{dx}{dt} + \alpha\beta x = e^{\gamma t} \tag{8}$$

[Step 1]

まず、(8) 式右辺=0 とした斉次微分方程式の一般解を求める。$x = e^{\lambda t}$ (λ は定数) の形の解を仮定して得られる特性方程式

$$\lambda^2 - (\alpha+\beta)\lambda + \alpha\beta = 0$$

を解くと 2 つの 2 実数解 $\lambda = \alpha, \beta$ が得られるので、この斉次微分方程式の一般解は $x_{\text{斉次}}(t) = C_1e^{\alpha t} + C_2e^{\beta t}$ である。

[Step 2]

次に、非斉次微分方程式の特殊解を一つ求める。ここで、非斉次微分方程式の右辺に着目し、$x_{\text{特殊}}(t) = Ae^{\gamma t}$ の形の特殊解を仮定し、非斉次微分方程式 (8) 式が満たされるよう A を定める。1 回微分と 2 回微分を計算すると

$$\begin{aligned} x'_{\text{特殊}}(t) &= A\gamma e^{\gamma t} \\ x''_{\text{特殊}}(t) &= A\gamma^2 e^{\gamma t} \end{aligned}$$

となるので、非斉次微分方程式 (8) 式に代入する。

$$\begin{aligned} &A\gamma^2e^{\gamma t} - (\alpha+\beta)A\gamma e^{\gamma t} + \alpha\beta Ae^{\gamma t} = e^{\gamma t} \\ &A(\gamma^2 - (\alpha+\beta)\gamma + \alpha\beta)e^{\gamma t} = e^{\gamma t} \\ &A(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta) = 1 \\ &A = \frac{1}{(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)} \end{aligned}$$

よって、特殊解は $x_{\text{特殊}}(t) = \frac{1}{(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)}e^{\gamma t}$ である。
[Step 3]
以上から、問題の非斉次微分方程式の一般解は

$$x(t) = \underline{\frac{1}{(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)}e^{\gamma t} + C_1 e^{\alpha t} + C_2 e^{\beta t}}$$

である。

3.3 指数関数入力 (2)

以下の微分方程式を解け。ただし、α, β は $\alpha \neq \beta$ を満たす実数定数であるとする。

$$\frac{d^2x}{dt^2} - (\alpha+\beta)\frac{dx}{dt} + \alpha\beta x = e^{\alpha t} \tag{9}$$

[Step 1]
前章「指数関数入力 (1)」との違いは、右辺の指数関数の肩の部分のみである。まず、(9) 式右辺=0 とした斉次微分方程式の一般解を求めるが、これは前章と同じく $x_{\text{斉次}}(t) = C_1 e^{\alpha t} + C_2 e^{\beta t}$ である。
[Step 2]
次に、非斉次微分方程式の特殊解を一つ求める。ここで前章の方法に従うと $x_{\text{特殊}}(t) = Ae^{\alpha t}$ と仮定したくなるが、これでは二重の意味で正しくない。それは以下の理由による。

- $Ae^{\alpha t}$ は斉次微分方程式の一般解 $x_{\text{斉次}}(t)$ に含まれている。$x_{\text{斉次}}(t)$ とは異なる特殊解を見つけなければならない
- そもそも $e^{\alpha t}$ は非斉次微分方程式 (9) 式を満たし得ない (代入してみるとわかる)

この場合どうすべきかというと、$x_{\text{特殊}}(t) = A\,t\,e^{\alpha t}$ **の形を仮定**する。これが非斉次微分方程式 (9) 式を満たすよう A を定める。1 回微分と 2 回微分を計算すると

$$\begin{aligned}
x'_{\text{特殊}}(t) &= Ae^{\alpha t} + A\,t\,\alpha e^{\alpha t} \\
&= A(1+\alpha t)e^{\alpha t} \\
x''_{\text{特殊}}(t) &= A\alpha e^{\alpha t} + A\alpha(1+\alpha t)e^{\alpha t} \\
&= A(2\alpha + \alpha^2 t)e^{\alpha t}
\end{aligned}$$

となる。積の微分 $(fg)' = f'g + fg'$ を用いていることに注意。これらを非斉次微分方程式 (9) 式に代入して A を定める。

$$\begin{aligned}
A(2\alpha+\alpha^2 t)e^{\alpha t} - (\alpha+\beta)A(1+\alpha t)e^{\alpha t} + \alpha\beta A\,t\,e^{\alpha t} = e^{\alpha t} \\
A(\alpha-\beta)e^{\alpha t} = e^{\alpha t} \\
A = \frac{1}{\alpha-\beta}
\end{aligned}$$

よって、特殊解は $x_{\text{特殊}}(t) = \frac{1}{\alpha-\beta}\,t\,e^{\alpha t}$ である。
[Step 3]
以上から、問題の非斉次微分方程式の一般解は

$$x(t) = \underline{\frac{1}{\alpha-\beta}\,t\,e^{\alpha t} + C_1 e^{\alpha t} + C_2 e^{\beta t}}$$

である。

3.4　三角関数入力 (1)

以下の微分方程式を解け。ただし、実数定数 ω, β は $\omega > 0, \beta \neq \omega$ を満たすとする。

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = \cos(\beta t) \tag{10}$$

[Step 1]
まず、(10) 式右辺=0 とした斉次微分方程式の一般解を求める。$x = e^{\lambda t}$ (λ は定数) の形の解を仮定して得られる特性方程式

$$\lambda^2 + \omega^2 = 0$$

を解くと 2 つの 2 虚数解 $\lambda = \pm i\omega$ が得られるので、この斉次微分方程式の一般解は $x_{\text{斉次}}(t) = C_1\cos(\omega t) + C_2\sin(\omega t)$ である。ここにかなりの省略があるが、何が省略されて cos, sin が現われたのかを理解しておくこと。

[Step 2]
次に、非斉次微分方程式の特殊解を一つ求める。ここで、非斉次微分方程式の右辺に着目し、βt を含む三角関数、すなわち $x_{\text{特殊}}(t) = A\cos(\beta t) + B\sin(\beta t)$ の形の特殊解を仮定し、非斉次微分方程式 (10) 式が満たされるよう A と B を定める。1 回微分と 2 回微分を計算すると

$$\begin{aligned} x'_{\text{特殊}}(t) &= -A\beta\sin(\beta t) + B\beta\cos(\beta t) \\ x''_{\text{特殊}}(t) &= -A\beta^2\cos(\beta t) - B\beta^2\sin(\beta t) \end{aligned}$$

となるので、非斉次微分方程式 (10) 式に代入する。

$$\begin{gathered} -A\beta^2\cos(\beta t) - B\beta^2\sin(\beta t) \\ +\omega^2(A\cos(\beta t) + B\sin(\beta t)) = \cos(\beta t) \\ (\omega^2 - \beta^2)(A\cos(\beta t) + B\sin(\beta t)) = \cos(\beta t) \end{gathered}$$

ここで両辺を見比べると $A = \frac{1}{\omega^2-\beta^2}$, $B = 0$ である。よって特殊解は $x_{\text{特殊}}(t) = \frac{1}{\omega^2-\beta^2}\cos(\beta t)$。

[Step 3]
以上から、問題の非斉次微分方程式の一般解は

$$x(t) = \underline{\frac{1}{\omega^2 - \beta^2}\cos(\beta t) + C_1\cos(\omega t) + C_2\sin(\omega t)}$$

である。

3.5　三角関数入力 (2)

以下の微分方程式を解け。ただし、実数定数 ω は $\omega > 0$ を満たすとする。

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = \cos(\omega t) \tag{11}$$

[Step 1]
まず、(11) 式右辺=0 とした斉次微分方程式の一般解を求める。これは前章の「三角関数入力 (1)」と同じなので $x_{\text{斉次}}(t) = C_1\cos(\omega t) + C_2\sin(\omega t)$ となる。

[Step 2]
次に、非斉次微分方程式の特殊解を一つ求める。前章と同様に $x_{\text{特殊}}(t) = A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t)$ の形の特殊解を仮定したくなるかもしれないが、これは間違いである。なぜなら、$x_{\text{特殊}}(t)$ と $x_{\text{斉次}}(t)$ が等しくなってしまうし、なによりこの形では (11) 式が満たされないからである。

このような場合は $x_{特殊}(t) = t\,(A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t))$ の形の特殊解を仮定すれば良い。非斉次微分方程式 (11) 式が満たされるよう A と B を定める。1 回微分と 2 回微分を計算すると

$$\begin{aligned}
x'_{特殊}(t) &= A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t) \\
&\quad +t\,(-A\omega\sin(\omega t) + B\omega\cos(\omega t)) \\
&= (A + B\omega t)\cos(\omega t) + (B - A\omega t)\sin(\omega t) \\
x''_{特殊}(t) &= B\omega\cos(\omega t) - (A + B\omega t)\omega\sin(\omega t) \\
&\quad -A\omega\sin(\omega t) + (B - A\omega t)\omega\cos(\omega t) \\
&= (2B\omega - A\omega^2 t)\cos(\omega t) - (2A\omega + B\omega^2 t)\sin(\omega t)
\end{aligned}$$

となるので、非斉次微分方程式 (11) 式に代入する。

$$\begin{gathered}
(2B\omega - A\omega^2 t)\cos(\omega t) - (2A\omega + B\omega^2 t)\sin(\omega t) \\
+\omega^2\, t\,(A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t)) = \cos(\omega t) \\
2B\omega\cos(\omega t) - 2A\omega\sin(\omega t) = \cos(\omega t)
\end{gathered}$$

ここで両辺を見比べると $A = 0,\ B = \frac{1}{2\omega}$ である。よって特殊解は $x_{特殊}(t) = \frac{1}{2\omega}\,t\,\sin(\omega t)$。

[Step 3]

以上から、問題の非斉次微分方程式の一般解は

$$x(t) = \underline{\frac{1}{2\omega}\,t\,\sin(\omega t) + C_1\cos(\omega t) + C_2\sin(\omega t)}$$

である。