線形代数学 演習問題 (12) まとめ

担当: 金丸隆志

学籍番号: ＿＿＿＿＿＿＿＿ 氏名: ＿＿＿＿＿＿＿＿

問題 1

次の連立方程式は a の値によらず解があることを示せ。また、$a = 1$ の時の解を求めよ。

$$\begin{cases} -x + 2y + z &= 0 \\ x - y - z &= a \end{cases}$$

問題 2

次の行列の階数は、a の値によってどう変わるか。

$$\begin{pmatrix} 1 & a-1 & 2 \\ a & 2 & -3 \\ 0 & a+1 & 3 \end{pmatrix}$$

問題 3

次の連立方程式の解を求めよ。必要であれば a の値によって場合分けを行なうこと。

$$\begin{cases} x - y - az &= 0 \\ y + z &= 2 \\ ax + 3y + z &= 10 \end{cases}$$

[**解答**]

問題 1

今、問題文の連立方程式を $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ の形で表わすと、$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ a \end{pmatrix}$ である。第七回の内容によると、$A = (\boldsymbol{a}_1 \boldsymbol{a}_2 \boldsymbol{a}_3)$ と書いたとき、方程式が解を持つための条件は $\dim S\{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3\} = \dim S\{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3, \boldsymbol{b}\}$ であることであった。この条件は階数 $r(A)$ の記号を用いると、$r(A) = r([A\ \ \boldsymbol{b}])$ と書ける。ただし、$[A\ \ \boldsymbol{b}]$ は行列 A とベクトル $\boldsymbol{b}$ を並べてできる行列である。それぞれ基本変形してみよう。**階数の導出には行の基本変形と列の基本変形の両方を使える**のだが、後で方程式の解を求める都合上、**行の基本変形のみ**を用いよう (**連立方程式の解を求める際に列の基本変形を用いてはならない**)。

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{(2\text{ 行目})+(1\text{ 行目})} \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{(1\text{ 行目})\times(-1)} \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{(1\text{ 行目})+(2\text{ 行目})\times 2}$$

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ これより、$r(A) = 2$ がわかる。一方、

$$[A\ \ \boldsymbol{b}] = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & a \end{pmatrix} \xrightarrow{(2\text{ 行目})+(1\text{ 行目})} \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & a \end{pmatrix} \xrightarrow{(1\text{ 行目})\times(-1)} \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & a \end{pmatrix}$$

$\xrightarrow{(1\text{ 行目})+(2\text{ 行目})\times 2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 2a \\ 0 & 1 & 0 & a \end{pmatrix}$ これより $r([A\ \ \boldsymbol{b}]) = 2$ がわかる。

結局、$r(A) = r([A\ \ \boldsymbol{b}])$ なので、この連立方程式は解を持つ。また、$a = 1$ のとき

$$[A\ \ \boldsymbol{b}] \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

なので、連立方程式は $x - z = 2$、$y = 1$ と変形されるから $z = t_1$ とおけば $x = 2 + t_1$, $y = 1$, $z = t_1$ である。よって、解は

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 + t_1 \\ 1 \\ t_1 \end{pmatrix} = \underline{\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}$$

問題 2

行列の成分に文字 a が入っているが、いつも通り計算してゆけばよい。

$$\begin{pmatrix} 1 & a-1 & 2 \\ a & 2 & -3 \\ 0 & a+1 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{(2\text{行目})-(1\text{行目})\times a} \begin{pmatrix} 1 & a-1 & 2 \\ 0 & -a^2+a+2 & -3-2a \\ 0 & a+1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\text{因数分解して}} \begin{pmatrix} 1 & a-1 & 2 \\ 0 & -(a-2)(a+1) & -3-2a \\ 0 & a+1 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{2\text{行目と }3\text{ 行目入れ換え}} \begin{pmatrix} 1 & a-1 & 2 \\ 0 & a+1 & 3 \\ 0 & -(a-2)(a+1) & -3-2a \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{(3\text{行目})+(2\text{行目})\times(a-2)} \begin{pmatrix} 1 & a-1 & 2 \\ 0 & a+1 & 3 \\ 0 & 0 & -3-2a+3(a-2) \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{整理して}} \begin{pmatrix} 1 & a-1 & 2 \\ 0 & a+1 & 3 \\ 0 & 0 & a-9 \end{pmatrix} \cdots (※)$$

ここで、$a \neq -1, 9$ の時、$a+1 \neq 0,\ a-9 \neq 0$ より 2 行目、3 行目をそれらで割ることができる。すなわち

$$\cdots \xrightarrow[(3\text{ 行目})\ /\ (a-9)]{(2\text{ 行目})\ /\ (a+1)} \begin{pmatrix} 1 & a-1 & 2 \\ 0 & 1 & 3/(a+1) \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$ これを最後まで変形すれば、階数が 3 であることがわかる。

一方、$a=-1$ のとき (※) 式は $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & -10 \end{pmatrix}$ となる。この基本変形を続けよう。

$$\cdots \xrightarrow[(3\text{ 行目})\ /\ (-10)]{(2\text{ 行目})\ /\ 3} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[(1\text{ 行目})\ -\ (2\text{ 行目})\ \times\ 2]{(3\text{ 行目})\ -\ (2\text{ 行目})} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

最後に列の変形を行なって

$$\cdots \xrightarrow{(2\text{ 列目})+(1\text{ 列目})\times 2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{(2\text{ 列目})\text{ と }(3\text{ 列目})\text{ 入れ換え}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$ よって、$a=-1$ の時の階数は 2 である。

最後に $a=9$ のとき (※) 式は $\begin{pmatrix} 1 & 8 & 2 \\ 0 & 10 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ となる。最後まで基本変形を続ければ $a=9$ のときの階数は 2 であることがわかる (省略)。

以上をまとめると、$\underline{\begin{cases} a \neq -1, 9 \text{ のとき階数は } 3 \\ a = -1, 9 \text{ のとき階数は } 2 \end{cases}}$

問題 3

やはり通常通り問題を解き進めれば良い。

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -a & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ a & 3 & 1 & 10 \end{pmatrix} \xrightarrow{(3\text{ 行目})-(1\text{ 行目})\times a} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -a & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 3+a & 1+a^2 & 10 \end{pmatrix} \xrightarrow[(3\text{ 行目})\ -\ (2\text{ 行目})\ \times\ (3+a)]{(1\text{ 行目})\ +\ (2\text{ 行目})}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1-a & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1+a^2-(3+a) & 10-2(3+a) \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{整理して}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1-a & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & (a-2)(a+1) & 2(2-a) \end{pmatrix}$$

ここから場合分けになる。3 行目の $(a-2)(a+1)$ が 0 になるかどうかで解が変化する。

$a=-1$ のとき、行列は $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$ であり、この第 3 行目は $0=6$ であり、これは当然成立しない。よって解は存在しない。

$a=2$ のとき、行列は $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ である。これは解を持つ。1 行目と 2 行目はそれぞれ $x-z=2$ および $y+z=2$ を表わす。$z=t_1$ と置けば解は

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+t_1 \\ 2-t_1 \\ t_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + t_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{である。}$$

最後に、$a \neq -1, 2$ の場合、$(a-2)(a+1) \neq 0$ であるから、これで割り算できる。すなわち

$$\cdots \xrightarrow{(3\,\text{行目})/(a-2)(a+1)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1-a & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -\dfrac{2}{a+1} \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{(2\,\text{行目}) - (3\,\text{行目})}]{(1\,\text{行目}) + (3\,\text{行目}) \times (a-1)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dfrac{4}{a+1} \\ 0 & 1 & 0 & \dfrac{2(a+2)}{a+1} \\ 0 & 0 & 1 & -\dfrac{2}{a+1} \end{pmatrix}$$

よって、$x = \dfrac{4}{a+1}, y = \dfrac{2(a+2)}{a+1}, z = -\dfrac{2}{a+1}$

以上をまとめると、

$$\begin{cases} a = -1 \text{ のとき} & \text{解なし} \\ a = 2 \text{ のとき} & \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + t_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ a \neq -1, 2 \text{ のとき} & \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{4}{a+1} \\ \dfrac{2(a+2)}{a+1} \\ -\dfrac{2}{a+1} \end{pmatrix} \end{cases}$$