線形代数学 演習問題 (7) 連立方程式と行列の次元

担当: 金丸隆志

学籍番号: 氏名:

問題

連立方程式 $\begin{cases} 2x-y-z &= 1 \\ -x-y+2z &= -2 \\ -x+2y-z &= 1 \end{cases}$ について、以下の問いに答えよ。

(1) この連立方程式を解け。

(2) この連立方程式を $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ と書き、さらに $A=(\boldsymbol{a}_1\ \boldsymbol{a}_2\ \boldsymbol{a}_3)$ と書いたとき、$\dim S\{\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3\}$ と $\dim S\{\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3,\boldsymbol{b}\}$ (張る空間の次元) をそれぞれ計算し、(1) の結果と比較せよ。

(3) $\dim$ (Ker A) を求め、(1) の結果と比較せよ。

[**解答**] (1)

$$\begin{aligned} 2x-y-z &= 1 && \text{(i)} \\ -x-y+2z &= -2 && \text{(ii)} \\ -x+2y-z &= 1 && \text{(iii)} \end{aligned}$$

((ii) + 2 × (iii))/(−3) より、

$$x-y=0 \quad \text{(iv)}$$

(2 × (i) + (ii))/3 より、

$$x-y=0 \quad \text{(v)}$$

(iv), (v) 式より、x,y を求める式が一つしかないから、解は無数にある。$y=k$ とおくと (iv) 式より $x=k$、さらに (i) より $z=2x-y-1=k-1$。まとめると、$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k \\ k \\ k-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + k\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$。ただし k は任意である。

補足すると $k\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ は行列 A の核 (Ker A) を表す。

(2) $\dim S\{\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3\}$ (次元) は $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3$ の中で一次独立なベクトルの最大個数であった (第六回)。$\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3$ が一次独立かどうかを調べるため、方程式 $c_1\boldsymbol{a}_1+c_2\boldsymbol{a}_2+c_3\boldsymbol{a}_3=\boldsymbol{0}$ の解を調べる。成分を書き下して、

$$\begin{aligned} 2c_1-c_2-c_3 &= 0 && \text{(vi)} \\ -c_1-c_2+2c_3 &= 0 && \text{(vii)} \\ -c_1+2c_2-c_3 &= 0 && \text{(viii)} \end{aligned}$$

((vii) + 2 × (viii))/(−3) より、

$$c_1-c_2=0 \quad \text{(ix)}$$

(2 × (vi) + (vii))/3 より、

$$c_1-c_2=0 \quad \text{(x)}$$

(ix), (x) 式より、c_1,c_2 を求める式が一つしかないから、解は無数にある。$c_2=k$ とおくと最終的に $(c_1,c_2,c_3)=(k,k,k)$。となり、$c_1=c_2=c_3=0$ 以外で $c_1\boldsymbol{a}_1+c_2\boldsymbol{a}_2+c_3\boldsymbol{a}_3=\boldsymbol{0}$ が満たされるから、$\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3$ は一次従属。よって、$S\{\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3\}$ は 3 次元ではない。次に、$\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2$ が一次独立かを調べるため、$c_1\boldsymbol{a}_1+c_2\boldsymbol{a}_2=\boldsymbol{0}$ の解を考えよう。

$$\begin{aligned} 2c_1-c_2 &= 0 && \text{(xi)} \\ -c_1-c_2 &= 0 && \text{(xii)} \\ -c_1+2c_2 &= 0 && \text{(xiii)} \end{aligned}$$

これを解くと $c_1=c_2=0$。よって $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2$ は一次独立。一次独立なベクトルが 2 つ取れたから、

$\dim S\{\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3\}=2$。

次に、$\dim S\{\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3,\boldsymbol{b}\}$ を考える。次元とは一次独立なベクトルの個数なのだから、$\boldsymbol{b}$ を加えたことによって次元が増えるかどうかが問題である。上の計算より、$\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3$ は一次独立ではなく、$\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2$ は一次独立であることが分かっているので、$\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{b}$ が一次独立かを調べれば良い。$c_1\boldsymbol{a}_1+c_2\boldsymbol{a}_2+c_3\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$ の成分を書き下すと、

$$\begin{aligned} 2c_1-c_2+c_3 &= 0 && \text{(xiv)} \\ -c_1-c_2-2c_3 &= 0 && \text{(xv)} \\ -c_1+2c_2+c_3 &= 0 && \text{(xvi)} \end{aligned}$$

c_3 の係数は $\boldsymbol{a}_3$ ではなく $\boldsymbol{b}$ になっていることに注意。

((xv) + 2 × (xvi))/(−3) より、

$$c_1-c_2=0 \quad \text{(xvii)}$$

(2 × (xiv) + (xv))/3 より、

$$c_1-c_2=0 \quad \text{(xviii)}$$

c_1,c_2 の式が 1 つしかないので、c_1,c_2,c_3 は一つに定まらない。実際、$(c_1,c_2,c_3)=(k,k,-k)$ となる。よって $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{b}$ は一次従属。

結局、$\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3, \boldsymbol{b}$ の中から一次独立なベクトルは 2 つしか取れないので、$\underline{\dim\ S\{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3, \boldsymbol{b}\} = 2}$

まとめると、$\underline{\dim\ S\{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3\} = \dim\ S\{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3, \boldsymbol{b}\}}$ なので、問題の連立方程式は解を持つ。(解が一つか無数かはこれだけではわからない)

(3)

$\dim\ (\mathrm{Ker}\ A) = 3 - \dim\ (\mathrm{Im}\ A)$ であり、さらに $\dim\ (\mathrm{Im}\ A) = \dim\ S\{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3\}$ であるが、(2) ですでに $\dim\ S\{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3\} = 2$ が分かっているので、$\underline{\dim\ (\mathrm{Ker}\ A)} = 3 - 2 = \underline{1}$。

$\dim\ (\mathrm{Ker}\ A) \neq 0$ なので、連立方程式の解は一つではない。(1) より、確かに連立方程式の解は一つではないことが確認できる。

[**まとめ**]

- $\dim\ S\{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3\} = \dim\ S\{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3, \boldsymbol{b}\}$ ならば、方程式は解を持つ
- $\dim\ (\mathrm{Ker}\ A) = 0$ であれば解が唯一に定まる。